УДК 517.956.45+517.977.56+517.977.57

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО НА ДВУМЕРНОЙ СФЕРЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА

Д.В. Туницкий
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Ключевые слова: уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболические уравнения второго порядка, полулинейные уравнения на многообразиях, слабые решения, импульсное управление, стабилизация, оптимальное управление.

Аннотация: Работа посвящена оптимальному управлению смешанным сбором (стационарным и периодическим импульсным) возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли. Примерами такого ресурса служат промысловые биологические популяции. Доказано, что при бесконечном горизонте планирования существует допустимое управление, обеспечивающее максимум временного среднего сбора.

1. Введение

Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial q}{\partial t}+Lq=f(x,q), Lq=-\sum_{l,m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(a^{l,m}(x)\frac{\partial q}{\partial x^m}\right).$$

Такие уравнения нередко применяются для математического моделирования различных процессов, связанных с описанием реакции-диффузии. Среди многочисленных работ, посвященных этим уравнениям в первую очередь следует выделить статьи А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского, Н.С. Пискунова [1] и Р.А. Фишера [2], в которых изучаются решения уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial t}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^l)^2}=f(q)$$

и их приложения. Статья [3] содержит сведения по истории и библиографии работ, посвященных уравнениям рассматриваемого вида, в монографии [4] приведен ряд приложений таких уравнений к биологии.

Отметим, что в [3] изучаются уравнения с оператором L, имеющим периодические коэффициенты. Этот случай сводится к уравнениям на -мерном торе $\mathbb{T}^n$. Значительный интерес представляют аналоги уравнений рассматриваемого типа на многообразиях, гомеоморфных сфере $\mathbb{S}^2$, поскольку во многих ситуациях допустимо считать поверхность Земли гомеоморфной $\mathbb{S}^2$.

2. Постановка задачи

2.1. Функциональные пространства тензорных полей

Рассмотрим двумерную сферу $\mathbb{S}^2$ радиуса 1. Стандартное вложением $\mathbb{S}^2$ в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ индуцирует на ней риманову метрику g, которая в сферических координатах $x^1 = \theta, x^2 = \varphi, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$, имеет вид

$$\sum_{l,m=1}^{2} g(dx^l, dx^m) dx^l dx^m = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2.$$

Метрика g порождает на $\mathbb{S}^2$ ковариантное дифференцирование ∇_g и меру $\mu = \mu_g$, в сферических координатах $d\mu = |\sin\theta| d\theta d\varphi$.

Для заданных на $\mathbb{S}^2$ вещественнозначных функций u и v положим

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{S}^2} u(x)v(x)d\mu, \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{S}^2} u(x) = \inf_{\substack{S\subseteq\mathbb{S}^2,\\ \mu(S)=0}} \sup_{x\in\mathbb{S}^2\setminus S} u(x).$$

С помощью метрики g и меры μ обычным образом конструируются пространства функций $L^p(\mathbb{S}^2)$ и тензорных полей $L^p\left((\mathrm{T}\mathbb{S}^2)^{\otimes m} \otimes (\mathrm{T}^*\mathbb{S}^2)^{\otimes l}\right)$ для $p \geq 1$ и $m, l = 0,1,2, \dots$. Аналогично с привлечением ковариантного дифференцирования ∇ конструируются пространства Соболева $W^{k,p}(\mathbb{S}^2)$ и $W^{k,p}\left((\mathrm{T}\mathbb{S}^2)^{\otimes m} \otimes (\mathrm{T}^*\mathbb{S}^2)^{\otimes l}\right)$ для $k = 0,1,2, \dots$, и пространства Гельдера $C^{k,\alpha}(\mathbb{S}^2)$ и $C^{k,\alpha}\left((\mathrm{T}\mathbb{S}^2)^{\otimes m} \otimes (\mathrm{T}^*\mathbb{S}^2)^{\otimes l}\right)$ для $0 < \alpha \leq 1$; см. [5; п. 10.2.4] и [6].

Фиксируем $T \in (0, +\infty]$ и рассмотрим декартово произведение $[0, T) \times \mathbb{S}^2$. На касательном расслоении определена метрика $g_{[0,T)\times\mathbb{S}^2} = t^2 + g$ и соответствующие ей ковариантное дифференцирование $\nabla_{g_{[0,T)\times\mathbb{S}^2}} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_g$ и мера $\mu_{g_{[0,T)\times\mathbb{S}^2}} = dt \times \mu_g$. С их помощью конструируются функциональные пространства $L^p([0, T) \times \mathbb{S}^2)$, $L^p\left(\left(\mathrm{T}([0,T)\times\mathbb{S}^2)\right)^{\otimes m} \otimes \left(\mathrm{T}^*([0,T)\times\mathbb{S}^2)\right)^{\otimes l}\right)$ и $C^{k,\alpha}([0, T) \times \mathbb{S}^2)$, $C^{k,\alpha}\left(\left(\mathrm{T}([0,T)\times\mathbb{S}^2)\right)^{\otimes m} \otimes \left(\mathrm{T}^*([0,T)\times\mathbb{S}^2)\right)^{\otimes l}\right)$.

Если B – произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$, то стандартным образом определяются банаховы пространства $L^p([0, T); B)$, $p \geq 1$, с нормами

$$\|q\|_{L^p([0,T);B)} = \left(\int_0^T \|q(t)\|_B^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1, \|q\|_{L^\infty([0,T);B)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T)} \|q(t)\|_B,$$

см. [7, гл. III, § 1], [8, гл. II, § 2]. Положим

$$V([0,T); \mathbb{S}^2) = L^2\big((0,T); W^{1,2}(\mathbb{S}^2)\big) \cap L^\infty\big([0,T); L^2(\mathbb{S}^2)\big).$$

Это банахово пространство с нормой

$$\|q\|^2_{V([0,T);\mathbb{S}^2)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T)} \langle q(t), q(t)\rangle + \int_0^T \langle dq(t), dq(t)\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*\mathbb{S}^2)} dt.$$

2.2. Задача Коши с периодическим импульсным сбором

Пусть наряду с g на сфере $\mathbb{S}^2$ задана еще одна метрика a, которая измерима и при некоторых положительных числах a_0 и a_1 удовлетворяет условию

$$a_0 g(\eta, \eta) \leq a(\eta, \eta) \leq a_1 g(\eta, \eta)$$

для всех $\eta \in \mathrm{T}^*\mathbb{S}^2$. Рассмотрим оператор d_a^*, формально сопряженный с оператором внешнего дифференцирования d относительно метрики a, см. [9; гл. VIII, § 1]. По определению $\langle a(dq, v), 1\rangle = \langle q, d_a^* v\rangle$ для всех дифференциальных -форм q и $(k+1)$-форм v, $k = 0,1, \dots, n-1$, и на k-формах $d_a^* = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$, где $* = *_a$ – оператор

Ходжа, индуцированный метрикой a. *Геометрический лапласиан* (*оператор Лапласа – де Рама*) – это линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta = \Delta_a = d_a^* \circ d,$$

определенный на функциях $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, см. [10; гл. IV, § 5]. Наложенное выше на метрику a условие обеспечивает *равномерную эллиптичность* Δ на $\mathbb{S}^2$.

Поскольку оператор Δ эллиптичен, то эволюционное уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Delta q = \big(A(x) - u(x)\big)q - B(x)q^2$$

параболично. Здесь неизвестная функция $q = q(t,x)$ соответствует плотности распределения некоторого возобновляемого ресурса в точке x сферы $\mathbb{S}^2$ в момент времени t, метрика a в операторе Δ характеризует диффузию ресурса, функция u – управление его стационарным (перманентным) сбором, а коэффициенты A и B – темпы обновления и насыщения им среды. Потребуем, чтобы $A, u, B \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, и $B \geq B_0$ п.в. для фиксированного числа $B_0 > 0$.

Слабым решением эволюционного уравнения на полуинтервале $[0,T)$ называется такая функция $q \in V([0,T); \mathbb{S}^2)$, что $Bq^2 \in L^2([0,T) \times \mathbb{S}^2)$ и

$$\langle q,p\rangle(t) + \int_0^t \Big(\langle dq, dp\rangle_{L^2(\mathrm{T}^*\mathbb{S}^2)} - \langle q, p'\rangle\Big)(\tau)d\tau = \langle q,p\rangle(0) + \int_0^t \langle (A-u)q - Bq^2, p\rangle(\tau)d\tau$$

для всякого $p \in C^\infty([0,T); \mathbb{S}^2)$ и $t \in [0,T)$. Слабое решение q эволюционного уравнения, принимающее заданное начальное значение

$$q(0) = q_0, q_0 \in L^\infty(\mathbb{S}^2), q_0 \geq 0 \text{ п. в.},$$

называется *слабым решением задачи Коши на* $[0,T)$.

Математическое моделирование широкого ряда процессов, связанных с периодическим сбором возобновляемых ресурсов, приводят к рассматриваемой задаче Коши на полуинтервале $[0,+\infty)$, решение q которой удовлетворяет дополнительным *условиям импульсного сбора* с заданным *периодом* $T > 0$,

$$q(kT) = sq(kT-), k = 1,2,\ldots, s \in L^\infty(\mathbb{S}^2), 0 \leq s \leq 1 \text{ п. в.}$$

Слабым решением эволюционного уравнения с периодическим импульсным сбором называется функция $q \in L^\infty([0,T) \times \mathbb{S}^2)$, которая является слабым решением эволюционного уравнения на полуинтервалах $[kT,(k+1)T)$, обладает левыми предельными значениями $q(kT-)$ и п.в. удовлетворяет условиям периодического импульсного сбора. Такое решение называется *периодическим*, если $q(0) = q(T)$.

2.3. Целевой функционал

Определим функционал

$$Q: L^\infty(\mathbb{S}^2) \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{S} \ni (q_0, u, s) \mapsto$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\left(\int_0^t \langle q(\tau; q_0, u, s), u\rangle d\tau + \sum_{0<kT\leq t} \langle q(kT-; q_0, u, s), 1-s\rangle\right) \in \mathbb{R},$$

где $q = q(t; q_0, u, s)$ – слабое решение задачи Коши с периодическим импульсным сбором, а $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ – фиксированные множества *допустимых управлений*. Значение этого функционала – временное усреднение стационарного (первое слагаемое) и импульсного (второе слагаемое) сбора ресурса, плотностью которого является решение q. Характерными для приложений допустимыми множествами стационарных и импульсных управлений $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ являются

$$\mathfrak{U} = \{u \in L^\infty(\mathbb{S}^2) \mid U_1 \leq u \leq U_2\}, \mathfrak{S} = \{e^{-\gamma r} \mid r \in L^\infty(\mathbb{S}^2), R_1 \leq r \leq R_2, \langle 1, r\rangle \leq E\},$$

где U_1, U_2, R_1, R_2 и γ – такие фиксированные вещественнозначные функции, что $U_1, U_2, R_1, R_2 \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, U_1 и R_1 неотрицательны, γ – измерима и неотрицательна на $\mathbb{S}^2$, а $E \in \mathbb{R}$ – допустимое усилие сбора – неотрицательно.

Требуется установить существование допустимых стационарного и импульсного управлений $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$, доставляющих максимальное значение функционалу целевого Q, и выяснить влияние начального значения q_0 на величину $Q(q_0, u, s)$, ср. с [11] и [12].

3. Основные результаты

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (существование и единственность решения) [13]. *Пусть метрика* $a \in L^\infty\big((\mathrm{T}^*\mathbb{S}^2)^{\otimes 2}\big)$, *а функции* $A, u, B, q_0 \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ *и* $B \geq B_0$ *п.в. для некоторого числа* $B_0 > 0$. *Тогда на полуинтервале* $[0, +\infty)$ *существует единственное слабое решение* q *задачи Коши, причем* $q \in C\big([0, +\infty); L^2(\mathbb{S}^2)\big) \cap L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{S}^2)$.

Известно, что слабые решения эволюционных уравнений рассматриваемого типа локально непрерывны по Гельдеру. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (регулярность слабого решения). *Пусть коэффициенты эволюционного уравнения удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда для любых слабого решения* $q \in L^\infty([0, T) \times \mathbb{S}^2)$ *этого уравнения и* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $\alpha = \alpha\left(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([0,T)\times\mathbb{S}^2)}\right)$, $0 < \alpha \leq 1$, *и* $C = C\left(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([0,T)\times\mathbb{S}^2)}\right) \geq 0$, *что*

$$q \in C^{0,\alpha}([\varepsilon, T) \times \mathbb{S}^2), \|q\|_{C^{0,\alpha}([\varepsilon,T)\times\mathbb{S}^2)} \leq C.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3 (существование, единственность и регулярность решения). *Пусть коэффициенты эволюционного уравнения удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда существует единственное слабое решение* q *задачи Коши с периодическим импульсным сбором. При этом для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие числа* α, $0 < \alpha \leq 1$, *и* $C \geq 0$, *зависящие от* ε, *что для* $k = 1,2, \ldots$

$$q \in C^{0,\alpha}([\varepsilon + (k-1)T, kT) \times \mathbb{S}^2), \|q\|_{C^{0,\alpha}([\varepsilon+(k-1)T,kT)\times\mathbb{S}^2)} \leq C.$$

Выясним условия, при которых слабое решение q задачи Коши с периодическим импульсным сбором стремится к периодическому решению при $t \longrightarrow +\infty$.

Теорема 4 (стабилизация к периодическому решению). *Пусть выполнены все условия, наложенные в теореме 1 на коэффициенты эволюционного уравнения и в разделе 2.3 на множества допустимых управлений* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{S}$. *Тогда при фиксированных* $u \in \mathfrak{U}$ *и* $s \in \mathfrak{S}$ *существует такое единственное периодическое слабое решение* $q_\infty = q_\infty(t; u, s)$ *эволюционного уравнения с периодическим импульсным сбором, что для всякого слабого решения* $q = q(t; q_0, u, s)$ *задачи Коши с периодическим импульсным сбором и нормой начального значения* $\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} > 0$ *выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} \|q(t; q_0, u, s) - q_\infty(t; u, s)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} = 0.$$

С помощью теоремы 4 устанавливается

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) Целевой функционал Q *при фиксированных допустимых управлениях* $u \in \mathfrak{U}$ *и* $s \in \mathfrak{S}$ *принимает одно и то же значение для всех начальных значений* q_0 *с нормой* $\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} > 0$, *а именно* $Q(q_0, u, s) = Q(q_\infty(0; u, s), u, s)$, *так что*

$$Q(q_\infty(0;u,s),u,s) = \frac{1}{T}\left(\int_0^T \langle q_\infty(\tau;u,s),u\rangle d\tau + \langle q_\infty(T-;u,s),1-s\rangle\right).$$

(b) Значения целевого функционала Q ограничены, его точная верхняя грань не зависит от выбора начальных значений q_0, и существуют доставляющие эту точную верхнюю грань допустимые управления $\tilde{u} \in \mathfrak{U}$ и $\tilde{s} \in \mathfrak{S}$ и периодическое слабое решение $q_\infty(\,\cdot\,;\tilde{u},\tilde{s})$ эволюционного уравнения с периодическим импульсным сбором, т.е.

$$\sup_{u\in\mathfrak{U},s\in\mathfrak{S},q_0\in L^\infty(\mathbb{S}^2),q_0\geq 0} Q(q_0,u,s) = Q(q_\infty(0;\tilde{u},\tilde{s}),\tilde{u},\tilde{s}).$$

Автор выражает благодарность А.А. Давыдову за постановку задачи и полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

Список литературы

1. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1-26.
2. Fisher R.A. The advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. Vol. 7. P. 335-369.
3. Berestycki H., François H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model : I – Species persistence // J. Math. Biol. 2005. Vol. 51. P. 75-113.
4. Pethame B. Parabolic Equations in Biology. Heidelberg: Springer, 2015.
5. Nicolaescu L.I. Lectures on the Geometry of Manifolds. New Jersey: World Scientific, 2021.
6. Tunitsky D.V. On Solvability of Second-Order Semilinear Elliptic Equations on Spheres // Proceedings of the 14th International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). 27-29 September, 2021. IEEE. P. 1-4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9600203.
7. Showalter R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. Providence, RI: AMS, 1997.
8. Lions J.L. Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites, Berlin: Springerg, 1961.
9. Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
10. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
11. Davydov A., Vinnikov E. Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting // Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2023. Vol. 407. P. 101-112.
12. Арнольд В.И. Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его прил. 2002. Т. 36, Вып. 2. С. 1-11.
13. Tunitsky D.V. On Initial Value Problem for Semilinear Second Order Parabolic Equations on Spheres // Proceedings of the 15th International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD), 26–28 September, 2022. IEEE. P. 1–4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9934193.