УДК 514.86

ТЕРМОДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

С.Н. Тычков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: tychkovsn@ipu.ru

Ключевые слова: термодинамика, лагранжевы многообразия, кривая сосуществования.

Аннотация: В работе рассматривается термодинамика движущейся среды. Пространство термодинамических переменных дополняется двумя дополнительными величинами: деформация и напряжение среды. Приведена геометрическая интерпретация термодинамических уравнений как лагранжевых многообразий. Псевдориманова структура, возникающая на этих многообразиях, использована для отыскания кривой сосуществования фаз. Рассмотрен пример уравнения ван-дер-Ваальса.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются одномерные течения среды и вводится расширенное термодинамическое фазовое пространство, включающее деформацию Δ и напряжение σ в дополнение к обычным величинам: плотность массы ρ, плотность энтропии s, плотность энергии e, температура T, химический потенциал η. Для изучения этого фазового пространства применяются методы симплектической геометрии (см. [3, 4]).

2. Пространство термодинамических величин

Для простоты предполагается, что термодинамическое состояние зависит только от следа тензора деформации, иными словами, $D = \operatorname{Tr}\Delta$. Это предположение можно понять как переход к одномерному потоку, действительно, в одномерном случае $D = \Delta$. Тензор напряжений σ в этом случае также является скаляром.

В термодинамическом фазовом пространстве Φ имеются два типа величин, экстенстивные: плотность внутренней энергии e, плотность массы ρ, деформация D; и соответствующие интенсивные: температура T, химический потенциал η, напряжение σ. Контактная форма

$$\alpha = T\,ds - de + \eta\,d\rho + \sigma\,dD \tag{1}$$

задает в пространстве Φ лежандрово многообразие, которое определяет термодинамическое состояние. Соответствующая симплектическая 2-форма

$$\Omega = d\alpha = \frac{1}{T^2}\left(de \wedge dT + \eta\, dT \wedge d\rho + \sigma\, dT \wedge dD + T\, d\rho \wedge d\eta + T\, dD \wedge d\sigma\right)$$

определяет лагранжево многообразие. Псевдориманова структура, определяющая допустимые области на этом многообразии, имеет вид:

$$\kappa = -\frac{1}{T^2}\left(dT \cdot de + T\, d\eta \cdot d\rho + T\, d\sigma \cdot dD - \eta\, dT \cdot d\rho - \sigma\, dT \cdot dD\right). \tag{2}$$

Введя свободную энергию Гельмгольца $h = e - Ts$, перепишем через нее дифференциальные формы (1) и (2):

$$\alpha_1 = dh + \frac{(e-h)}{T} dT + \eta\, d\rho - \eta\, d\rho - \sigma\, dD,$$

и

$$\kappa_1 = -\frac{1}{T}\left(dT \cdot de - \eta\, dT \cdot d\rho - \sigma\, dT \cdot dD + T\, d\eta \cdot d\rho + T\, d\sigma \cdot dD\right).$$

Последняя форма перепишется в еще более простом виде, если уравнение термодинамического состояния дано в виде выражения плотности свободной энергии $h = H(\rho, T, D)$, т. е.

$$\kappa_1 = H_{TT}\, dT^2 - H_{\rho\rho}\, d\rho^2 - H_{DD}\, dD^2 - 2H_{\rho D}\, d\rho \cdot dD. \tag{3}$$

Для ньютоновских сред величина h есть квадратичная функция деформации D, таким образом,

$$h(\rho, T, D) = h_0(\rho, T) - \left(\rho \frac{\partial h_0(\rho, T)}{\partial \rho} - h_0(\rho, T)\right) D + \frac{\mu(\rho, T)}{2} D^2,$$

где μ – вязкость, h_0 – плотность свободной энергии Гельмгольца неподвижной среды. Подставляя эту функцию в уравнение (3), получаем квадратичную форму

$$\begin{aligned}\kappa_1 = &\left(\frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} - \rho D \frac{\partial^3 h_0}{\partial \rho \partial T^2} + (1+D)\frac{\partial^2 h_0}{\partial T^2}\right) dT^2 - \\ &- \left(\frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} - \rho D \frac{\partial^3 h_0}{\partial \rho^3} + (1-D)\frac{\partial^2 h_0}{\partial \rho^2}\right) d\rho^2 - \\ &-2\left(D\frac{\partial \mu}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial^2 h_0}{\partial \rho^2}\right) d\rho \cdot dD - \mu\, dD^2.\end{aligned}$$

Вычислив условия вырождения этой формы, мы получим теорему.

Теорема 1. *Поверхность сосуществования движущейся ньютоновской среды определяется уравнением*

$$\begin{aligned}&\left(\mu\rho D\frac{\partial^3 h_0}{\partial \rho^3} + \left(\rho\frac{\partial^2 h_0}{\partial \rho^2}\right)^2 - \left(2\rho D\frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \mu(1-D)\right)\frac{\partial^2 h_0}{\partial \rho^2} - \right. \\ &\left. -\frac{D^2}{2}\left(\mu\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} - 2\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)^2\right)\right)\left((1+D)\frac{\partial^2 h_0}{\partial T^2} + \frac{D^2}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} - \rho D\frac{\partial^3 h_0}{\partial \rho \partial T^2}\right) = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Замечание 1. *Подставив $D = 0$ в уравнение (4), получим соотношеие*

$$\frac{\partial^2 h_0}{\partial T^2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial \rho^2}\left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial \rho^2} - \mu\right) = 0,$$

которое является уравнением кривой сосуществования неподвижной среды. Заметим, что при $\mu = 0$, имеет место хорошо известное уравнение кривой [3].

3. Пример: уравнение ван-дер-Ваальса

Рассмотрим пример, когда уравнение состояния неподвижной среды описывает уравнением ван-дер-Ваальса. В этом случае плотность свободной энергии Гельмгольца дана формулой

$$h_0(\rho, T) = \ln\left(T^{n/2}\left(\frac{3}{\rho} - 1\right)\right)\rho + \frac{9\rho^2}{8T^2}, \tag{5}$$

где ρ и T – безразмерные величины, привиденные к критическим значениям, n – число степеней свободы. Для уравнения состояния (5) кривая сосуществования задается соотношением.

$$\begin{aligned}
&\left(D^2T^3 + \rho\left(\frac{9}{2}(D-1)\rho + nT\right) - \frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)\left(\frac{16}{81}D^2\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2\rho(\rho-3)^4T^2 - \right.\\
&-\frac{8}{81}\mu\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2}D^2\rho(\rho-3)^4T^2 - \\
&-\frac{8}{9}D\left(r^3 - 6\rho^2 + 9\rho - 4T\right)(\rho-3)^2T\rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + \\
&+\frac{4}{9}(\rho-3)\mu T((D-1)\rho^4 + 9(1-D)\rho^3 + \\
&+27(D-1)\rho^2 + ((8D+4)T + 27(1-D))\rho - 12T) \\
&\left. + \left(r^3 - 6\rho^2 + 9\rho - 4T\right)^2\rho\right) = 0.
\end{aligned}$$

Исследование частично выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-20034.

Список литературы

1. Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Continuum mechanics of media with inner structures. // Differential Geometry and its Applications. 2021. Vol. 74. P. 101703.
2. Lychagin V. Thermodynamics as a Theory of Measurement. // J. of Geometry and Physics. 2022. Vol. 172. P. 104430.
3. Lychagin V., Roop M. Critical phenomena in filtration processes of real gases. // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, No. 3. P. 382–399.
4. Lychagin V., Roop M. Shock waves in Euler flows of gases. // Lobachevskii J. Math. 2020. Vol. 41, No. 12. P. 2473–2481.