УДК 517.9

О ВЫЖИВАНИИ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.В. Балашов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: balashov73@mail.ru

Ключевые слова: динамическая система, выживание решений, конус Булигана, липшицева обратная связь.

Аннотация: В работе для динамической системы общего вида обсуждается структура множества возмущений, а также локально липшицева обратная связь, которые позволяют решению задачи Коши этой системы оставаться в заданном замкнутом множестве в любой момент времени.

1. Введение

В теории управления хорошо известно понятие инвариантного эллипсоида, т.е. такого эллипсоида, из которого не выходит никакое решение устойчивой линейной системы с начальным условием также из этого эллипсоида. Оказывается, что аналогичные инвариантному эллипсоиду конструкции можно рассмотреть для произвольной динамической системы. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое подмножество и

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n,\ t_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

динамическая система. Последнее мы будем понимать в том смысле, что для любого начального условия $x_0 \in \mathcal{M}$ любое ее решение существует на луче $t \in [t_0, +\infty)$. Мы будем предполагать измеримость по Лебегу функции $f(\cdot, x)$ при каждом x и непрерывность $f(t,\cdot)$ при каждом t.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях решение задачи Коши (1) «выживает» в $\mathcal{M}$, т.е. $x(t) \in \mathcal{M}$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$? Выживание решений – важный раздел негладкого и многозначного анализа, которому посвящен ряд классических монографий [1], [2].

2. Вспомогательные факты

Для множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ определим внутренность, границу и замыкание как $\operatorname{int} \mathcal{M}$, $\partial \mathcal{M}$ и $\operatorname{cl} \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{B}_r(x)$ – замкнутый евклидов шар радиуса r с центром в точке x. Через $\varrho(x, \mathcal{M})$ определим расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$.

Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ скалярное произведение обозначим (x, y), евклидову норму x обозначим через $\|x\|$.

Напомним определение *верхнего касательного конуса* (или *конуса Булигана*) для замкнутого множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathcal{M}$:

$$(2) \qquad T(\mathcal{M}, x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \colon\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \{t_k\},\ t_k \to +0,\ \ \mathcal{B}_\varepsilon(v) \bigcap \frac{\mathcal{M} - x}{t_k} \neq \varnothing \right\}.$$

Эквивалентные формы конуса Булигана:

$$T(\mathcal{M}, x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \colon\ \exists \{t_k\},\ t_k \to +0,\ \ x + t_k v + o(t_k) \in \mathcal{M} \right\},$$

$$T(\mathcal{M}, x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \colon\ \ \liminf_{t \to +0} \varrho\left(v, \frac{\mathcal{M} - x}{t} \right) = 0 \right\}$$

или

$$T(\mathcal{M}, x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\delta > 0} \bigcup_{0 < t < \delta} \left(\frac{\mathcal{M} - x}{t} + \mathcal{B}_\varepsilon(0) \right).$$

Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ содержится в конусе $T(\mathcal{M}, x)$ тогда и только тогда, когда найдутся последовательность $\{t_k\}$ положительных чисел, стремящаяся к нулю, и последовательность векторов $\{v_k\}$, сходящаяся к v, такие, что $x + t_k v_k \in \mathcal{M}$. Если множество $\mathcal{M}$ выпукло и замкнуто, то для каждой точки $x \in \mathcal{M}$ для конуса (2) верно равенство

$$T(\mathcal{M}, x) = \mathrm{cl} \bigcup_{t > 0} \frac{\mathcal{M} - x}{t}.$$

Все указанные свойства конуса $T(\mathcal{M}, x)$ можно найти в [2] и в §1.4 [3].

Будем говорить, что для системы (1) выполнено условие выживания, если для почти всех $t \geqslant 0$ выполнено включение

$$(3) \qquad f(t, x) \in T(\mathcal{M}, x) \qquad \forall x \in \mathcal{M}.$$

Поскольку для внутренних точек $x \in \operatorname{int} \mathcal{M}$ конус $T(\mathcal{M}, x)$ очевидно равен $\mathbb{R}^n$, то условие выживания (3) достаточно проверять в граничных точках множества $\mathcal{M}$.

Пусть $L_1\big([0, +\infty), [0, +\infty)\big)$ есть пространство интегрируемых по Лебегу функций, которые определены на луче $[0, +\infty)$ со значениями в $[0, +\infty)$. Приведенная ниже теорема является частным случаем теоремы Таллоса о выживании для однозначной функции $f(t, x)$, см. [1, Theorem 11.7.1].

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ *– замкнутое подмножество и функция* $f(t, x)$ *удовлетворяет условиям:*

1) для любого $x \in \mathcal{M}$ *отображение* $t \mapsto f(t, x)$ *измеримо;*

2) для любого $t \geqslant 0$ *отображение* $x \mapsto f(t, x)$ *непрерывно;*

3) существует функция $c(\cdot) \in L_1\big([0, +\infty), [0, +\infty)\big)$ *такая, что*

$$\|f(t, x)\| \leqslant c(t)(1 + \|x\|).$$

Если выполнено условие выживания (3)*, то для любого* $t_0 \geqslant 0$ *и любого начального условия* $x_0 \in \mathcal{M}$ *существует решение* (1)*, которое удовлетворяет условию* $x(t) \in \mathcal{M}$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Для простоты рассмотрим далее случай автономной системы (1) с $f(t,x) = f(x)$. Пусть $f(x)$ для некоторой константы $c > 0$ удовлетворяет условию линейного роста $\|f(x)\| \leqslant c(1+\|x\|)$ для всех x, которое гарантирует продолжимость любого решения (1) вправо. Поскольку $c \notin L_1\big([0,+\infty),[0,+\infty)\big)$, мы не можем применять теорему 1 к такой функции. Однако продолжимость решения легко доказать. Зафиксируем произвольно $T > 0$. Рассмотрим функцию

$$f_T(t,x) = \begin{cases} f(x), & t \in [0,T], \\ (T+1-t)f(x), & t \in (T, T+1], \\ 0, & t > T+1. \end{cases}$$

Легко видеть, что f_T удовлетворяет условию теоремы 1 с

$$c(t) = \begin{cases} c, & t \in [0, T+1], \\ 0, & t > T+1, \end{cases}$$

и последняя функция принадлежит $L_1\big([0,+\infty),[0,+\infty)\big)$. Таким образом, некоторое решение задачи Коши $\dot{x} = f_T(t,x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M}$ по теореме 1 выживает при $t \geqslant t_0$, а значит существует решение задачи Коши (1), которое выживает на любом отрезке $[t_0, T]$.

Слова «существует решение» в формулировке теоремы 1 выше возникли не случайно, поскольку для непрерывной по x правой части в задаче (1) помимо выживающих могут быть и не выживающие решения. Рассмотрим простейший пример. Пусть $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ и $\mathcal{M} = \{0\}$. Тогда условие выживания (3) выполнено, так как $T(\mathcal{M}, 0) = \{0\}$ и для точки $x = 0$ имеем $f(0) = 0$. Но у задачи Коши $\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = 0$, есть как выживающее в $\mathcal{M}$ решение $x_0(t) = 0$, так и не выживающее решение $x_1(t) = t^3$.

Для того, чтобы исключить эту неоднозначность, будем далее дополнительно предполагать, что $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x при каждом фиксированном t. Как известно, это гарантирует единственность решения задачи Коши.

3. Наличие помехи и выживание с обратной локально липшицевой сязью

Пусть $v = v(t,x)$ – возмущение в уравнении

$$\dot{x} = f(x) + v, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M}, \quad t_0 \geqslant 0.$$

Будем считать, что функция v измерима по t и липшицева по x. Если значения v подчинены геометрическому ограничению

$$v(t,x) \in \mathcal{V} = \bigcap_{x \in \partial\mathcal{M}} \big(T(\mathcal{M}, x) - f(x)\big) \quad \forall t \geqslant t_0 \ \ \forall x \in \mathcal{M}, \tag{4}$$

то в силу теоремы 1 решение указанной выше возмущенной задачи Коши выживает во множестве $\mathcal{M}$. Таким образом, в случае $\mathcal{V} \neq \varnothing$ формула (4) задает множество допустимых возмущений $\mathcal{V}$, к которым нечувствительно решение: эти возмущения не могут изменить включение $x(t) \in \mathcal{M}$ при $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим систему

$$(5) \qquad \dot{x} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n, \quad t_0 \geqslant 0.$$

Будем считать, что правая часть уравнения липшицева и удовлетворяет условию линейного роста. Рассмотрим для простоты случай выпуклого множества $\mathcal{M}$, содержащего нуль в своей внутренности и имеющего липшицеву нормаль: существует константа $L > 0$ такая, что для всех $x, y \in \partial\mathcal{M}$ и единичных нормальных векторов $p(x)$ и $p(y)$ в точках x и y ко множеству $\mathcal{M}$ соответственно выполнено условие $\|p(x) - p(y)\| \leqslant L\|x - y\|$.

Пусть $[\lambda]_+ = \lambda$ при $\lambda \geqslant 0$ и $[\lambda]_+ = 0$ при $\lambda < 0$. Рассмотрим обратную связь вида

$$(6) \qquad u(\lambda x) = \begin{cases} -p(x)\left[\big(p(x), f(\lambda x)\big)\right]_+, & \lambda \in (\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & \lambda \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \qquad \forall x \in \partial\mathcal{M}.$$

Отметим, что для любого $x \in \partial\mathcal{M}$ и $\lambda \in (0, 1]$ выполнено равенство $p(x) \in N(\lambda\mathcal{M}, \lambda x)$, то есть единичная нормаль $p(\lambda x)$ ко множеству $\lambda\mathcal{M}$ в точке λx равна $p(x)$. Заметим, что функция $u(z)$ кусочно-липшицева по аргументу. По построению $u(\cdot)$ для любой точки $z = \lambda x \in \mathcal{M} \backslash (\frac{1}{2}\mathcal{M})$, $x \in \partial\mathcal{M}$, $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$, выполнено условие

$$u(z) \in T(\lambda\mathcal{M}, z) - f(z),$$

поскольку величина $\left[\big(p(x), f(\lambda x)\big)\right]_+$ есть в точности расстояние от точки $f(z)$ до $T(\lambda\mathcal{M}, z) = \{y \in \mathbb{R}^n : (p(x), y) \leqslant 0\}$. Неформально говоря, управление u «стремится» не выпустить вектор состояния системы из $\lambda\mathcal{M}$, если вектор состояния оказался во множестве $\lambda\mathcal{M}$.

Таким образом, возникает следующая идея кусочно-липшицевой обратной связи, которая заставляет решение (5) выживать во множестве $\mathcal{M}$. Сначала выбираем управление $w(t, x) = u$ по формуле (6). Если вектор состояния системы $x(t)$ в момент $t = t_1 \geqslant t_0$ попал во множество $\frac{1}{2}\mathcal{M}$, то положим $w(t, x) = 0$ при $t > t_1$ до тех пор, пока вектор состояния не выйдет на границу $\partial\mathcal{M}$, в момент времени $t = t_2$. Если $x(t_2) \in \partial\mathcal{M}$, то определяем $w(t, x) = u$ при $t > t_2$ по формуле (6). Если вектор состояния системы попадает во множество $\frac{1}{2}\mathcal{M}$ в момент времени $t_3 > t_2$, то снова задаем $w(t, x) = 0$ при $t > t_3$ до выхода (если таковой случится) вектора состояния на границу $\partial\mathcal{M}$ и т.д. Мы получаем систему

$$(7) \qquad \dot{x} = f(x) + w(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M},$$

в которой правая часть кусочно-липшицева по x. По построению функции w решение этой задачи Коши выживает в $\mathcal{M}$.

Результаты о существовании непрерывной по x обратной связи $w(t, x)$ в (7) для произвольного выпуклого замкнутого множества $\mathcal{M}$ можно найти в [4].

Список литературы

1. Aubin J.-P. Viability Theory // N.Y.: Springer Science & Business Media, 2009.

2. Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory // Berlin: Springer, 1984.
3. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. 2-е изд., исправл. и доп. // М. Физматлит. 2007.
4. Balashov M. V. Viability of the solution with a perturbation and feedback control // J. of Convex Analysis. 2024. Vol. 31, No. 1.