УДК 531.383

ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ СТОЯЧИМИ ВОЛНАМИ

В.Ф. Журавлев
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, к. 1
E-mail: ipm@ipmnet.ru

С.Е. Переляев
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, к. 1
E-mail: ipm@ipmnet.ru

Ключевые слова: обобщенный маятник Фуко, двумерный осциллятор Ван-дер-Поля, проблемы эффективного управления, волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), полусферический кварцевый резонатор.

Аннотация: Рассматриваются вопросы формирования обратных связей эффективного управления колебаниями обобщенного маятника Фуко. Под эффективностью управления понимается выбор таких законов формирования обратных связей, которые обеспечивают наискорейший выход осциллятора на стационарный режим. Изучаются два типа осциллятора – классический, с одной степенью свободы, совершающий прямолинейные колебания, и двумерный, совершающий плоские колебания [1]. Модель двумерного осциллятора используется обычно для изучения работы волнового твердотельного гироскопа (кварцевого полусферического резонатора).

1. Введение

В последнее время появился целый класс гироскопических приборов, в которых фактически реализована идея маятника Фуко. К этому классу относятся струнный гироскоп [2] , кольцевой гироскоп [3], полусферический кварцевый резонатор [4], квапазон [5] и некоторые другие. Во всех этих случаях играющий роль маятника Фуко осциллятор с двумя степенями свободы реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией.

При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии вовлекает реализованную гироскопистами рабочую форму собственных колебаний во вращение относительно инерциального пространства (исключение составляет струнный гироскоп), однако отношение угловой скорости формы относительно упругого тела к угловой скорости тела относительно инерциального пространства является константой, зависящей только от номера формы и почти не зависящей от свойств самого материала резонатора. Этот коэффициент получил название масштабного коэффициента, или коэффициента Брайана [1]

В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве все принципиальные вопросы теории подобного датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. По этой причине весь этот новый класс приборов может быть назван *обобщённым маятником Фуко.*

2. Волновой Гироскоп (принципиальная теория управления)

2.1. Основные требования к системе управления

Основной целью управления парциальным осциллятором является удержание его на фазовом многообразии *r = const, k = 0*. В фазовом пространстве переменных $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ двумерного осциллятора это многообразие представляет собой пересечение конуса нулевой квадратуры

(2.1.1) $K = x\dot{y} - \dot{x}y = 0$

со сферой постоянной амплитуды (полной энергии

(2.1.2) $E = (x^2 + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = const$

соответствует семейство произвольно ориентированных прямолинейных отрезков одинаковой длины и симметричных относительно начала координат. От конкретно реализованного такого отрезка и осуществляется отсчёт положения подвижного основания, поэтому многообразие *r = const, k = 0* носит название *отсчётного.*

Законы управления обобщённым маятником Фуко, формируемые посредством введения различных обратных связей, должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Асимптотическая устойчивость отсчётного многообразия.
2. Инвариантность по отношению к группе вращения в пространстве (x, y) .
3. Отсутствие интерференции каналов управления.
4. Инвариантность к фазовому потоку невозмущённой системы.
5. Инвариантность к трансляции по времени.

Первые два требования являются категорическими, от них зависит сама принципиальная возможность превращения реализованного проектировщиками маятника в гироскоп. Три последних требования определяют качество управления.

Известные первые примеры реализации законов управления, в частности, в гироскопе типа HRG-158 (диметр кварцевого резонатора 58 мм) гироскопической фирмы «Делко» (США), последним трём требованиям не удовлетворяли.

Для того, чтобы законы управления были инвариантны по отношению к группе вращения, они должны быть сформированы из дифференциальных инвариантов этой группы. Группа вращений в плоскости имеет три независимых дифференциальных инварианта первого порядка:

$$I_0 = x^2, I_1 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, I_2 = x\dot{y} - \dot{x}y .$$

Для инвариантности управления по отношению к фазовому потоку невозмущённой системы эти инварианты должны быть её первыми интегралами. Таких интегралов тоже три:

$$E = (I_0 - I_1)/2 , K = I_2, L = xy + \dot{x}\dot{y} .$$

2.2.Характеристика сил, используемых для управления

Линейные по координатам и скоростям силы, прикладываемые к маятнику с целью управления, в наиболее общей форме имеют вид:

(2.2.1) $$\begin{Vmatrix} X \\ Y \end{Vmatrix} = (C + N + H) \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + (D + \Gamma + G) \begin{Vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Vmatrix}.$$

Силы, зависящие только от координат называются позиционными силами.

В матричном представлении все силы из (2.2.1) определяются следующими матрицами. Симметрическая скалярная матрица потенциальных сил (силы сферического типа):

$$C = \begin{Vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{Vmatrix}, C = C^T.$$

Кососимметрическая матрица циркулярных сил:

$$N = \begin{Vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{Vmatrix}, N = -N^T.$$

Циркулярная сила ортогональна радиусу вектору, силовые линии её силового поля представляют собой окружности, что и объясняет её название. В специальной литературе встречаются и другие названия циркулярных сил: псевдогироскопические, собственно непотенциальные, силы радиальной коррекции.

Симметрическая матрица потенциальных сил гиперболического типа с нулевым следом (девиатор):

$$H = h \begin{Vmatrix} cos2\alpha & sin2\alpha \\ sin2\alpha & -cos2\alpha \end{Vmatrix}, trH = 0.$$

Угол α определяет положение главных осей жёсткости относительно осей (x, y).

Произвольная матрица позиционных сил раскладывается единственным образом в сумму приведённых трёх матриц.

Силы, линейно зависящие от скорости в самом общем случае также единственным способом раскладываются в сумму трёх типов сил.

Симметрическая скалярная матрица диссипативных сил сферического типа:

$$D = \begin{Vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{Vmatrix}.$$

Кососимметрическая матрица гироскопических сил:

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{Vmatrix}, \Gamma = -\Gamma^{\mathrm{T}}.$$

Гироскопическая сила ортогональна вектору скорости.

Симметрическая матрица диссипативных сил гиперболического типа с равным нулю следом (девиатор диссипативных сил):

$$G = g \begin{Vmatrix} cos2\beta & sin2\beta \\ sin2\beta & -cos2\beta \end{Vmatrix}, trG = 0.$$

Потенцильные и диссипативные силы гипреболического типа, определяемые девиаторами H и G для целей управления обычно не используются. Силы такого типа в системе, как правило, возникают в результате наличия тех или иных дефектов.

Для того, чтобы осмысленно управлять колебаниями двумерного парциального осциллятора необходимо вначале выяснить, к каким эволюциям состояния осциллятора приводят те, или иные силы, определяемые матрицами C, N, D, Γ.

Малые возмущения, в число которых включаются и электрические силы, необходимые для поддержания колебаний и управления ими, приводят в правой части системы дифференциальных резонатора ВТГ к наличию малых членов, зависящих от времени, от пространственной переменной φ, от величины перемещения w и от производных перемещения w повремени t и по углу стоячей волны φ. Кроме того, малыми будем считать все члены, содержащие угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ основания и её производную, которая, как известно равна угловому ускорению $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

Представим решение такого уравнения для основной формы колебаний в виде

(2.2.2) $$w = x(t)cos2\varphi + y(t)sin2\varphi.$$

Заменой времени можно уравнения привести к виду, в котором собственная частота колебаний на основной форме равна единице

(2.2.3) $$\ddot{x} + x = \varepsilon Q_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}), \ddot{y} + y = \varepsilon Q_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}).$$

Правые части системы (2.2.3) зависят не только от переменных, определяющих фазовое состояние выбранной формы колебаний, но и от всех остальных форм.

2.3.Характеристика эволюций фазового состояния

В системе уравнений парциального осциллятора вида (2.2.3) выполним замену исходных переменных $(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ по следующим формулам:

$$x = x_1 cost + x_3\, sint, y = x_2 cost + x_4\, sint$$

(2.3.1) $$\dot{x} = -x_1 sint + x_3\, cost, \dot{y} = -x_2 sint + x_4\, cost$$

Будем обозначать в дальнейшем переменной x полный вектор, определяющий фазовое состояние (x_1, x_2, x_3, x_4) двумерного парциального осциллятора. Если управления отсутствуют ($\boldsymbol{\varepsilon} = 0$), то $x = const$ и уравнения (2.3.1) определяют эллипс. Таким образом, каждая точка фазового пространства (x_1, x_2, x_3, x_4) определяет единственную эллиптическую траекторию в пространстве двух переменных (x_1, x_2) и наоборот каждой эллиптической траектории в конфигурационном пространстве соответствует единственная точка в фазовом пространстве.

Среди эллиптических траекторий есть вырожденные. Это либо отрезки прямых, либо окружности. Известно, что механическая стоячая волна получается в результате суммирования двух противоположно бегущих волн одинаковой амплитуды:

$$w = rcos(2\varphi - t) + rsin(2\varphi - t)$$

Приведём это выражение к форме (2.2.2), используя замену (2.3.1). Получим, что этой стоячей волне соответствует вырожденный эллипс в виде отрезка прямой на оси x. Вообще любым симметричным относительно центра отрезкам соответствуют стоячие волны и наоборот. Если имеем дело с бегущей волной следующего вида:

$$w = rcos(2\varphi - t),$$

то для неё следует $x(t) = rcos(t), y(t) = rsin(t)$, что представляет собой уравнения окружности. Таким образом, бегущим волнам соответствует другое вырождение эллипса в виде окружности.

В первом случае фазовый вектор $\boldsymbol{x}$ должен удовлетворять условию

(2.3.2) $$K = det \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0.$$

представляющему собой уравнение трёхмерного конуса в пространстве $\boldsymbol{R^4}$.

Если траектория − окружность, то вектор $\boldsymbol{x}$ должен удовлетворять условию

(2.3.3) $$L = (x_1 \pm x_4)^2 + (x_2 \pm x_3)^2 = 0.$$

Это многообразие представляет собой двумерную ось конуса (2.3.2). Таким образом, множество всех стоячих волн в резонаторе находится во взаимно однозначном (1 – 1) соответствии с точками конуса (2.3.2) в пространстве $\boldsymbol{x}$, а множество всех бегущих волн − с точками его оси – (2.3.3).

Выразим угол θ, определяющий ориентацию стоячей волны относительно кольца, через компоненты вектора $\boldsymbol{x}$. Стоячая волна для второй рабочей формы колебаний в общем виде имеет вид:

$$w = rcos(t - \alpha) cos2(\varphi - \theta).$$

Поскольку, очевидно имеют место следующие равенства:

$$x_1 = rcos(\alpha) cos2(\theta), x_2 = rcos(\alpha) sin2(\theta),$$
$$x_3 = rsin(\alpha) cos2(\theta), x_4 = rsin(\alpha) sin2(\theta),$$

из которых следует

$$r^2 sin4(\theta) = 2(x_1 x_2 + x_3 x_4), r^2 cos4(\theta) = (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$$

Введём обозначения для двух квадратичных форм, сопряжённых форме K:

$$K_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4, K_2 = (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) \;\; /2.$$

Тогда искомый угол ориентации волны может вычисляться по следующим формулам:

$$sin4(\theta) = \frac{2K_1}{r^2}, cos4(\theta) = \frac{2K_2}{r^2},$$

где соответственно: $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

3. Уравнение идеального управляемого обобщенного маятника Фуко

В соответствии с полученной выше таблицей инфинитезимальных вариаций фазового состояния маятника, для управления амплитудой при отсутствии интерференции каналов можно пользоваться только силами $D(\dot{x}+\dot{y})$. стабилизированной амплитуде колебаний соответствует значение полной энергии, которое мы обозначим через переменную E_0 . Для реализации простейшей обратной связи по амплитуде достаточно коэффициент d , входящий в скалярную матрицу D, выбрать равным выражению:

$$d = \varepsilon\,(E_0 - E).$$

Для управления квадратурой, не вызывая никаких других эволюций в простейшем случае коэффициент n достаточно выбрать равным величине $n = \mu K$.

В результате получаем следующие дифференциальные уравнения идеального управляемого обобщенного маятника Фуко:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -\varepsilon(E - E_0)\dot{x} + \mu K y \\ \ddot{y} + y &= -\varepsilon(E - E_0)\dot{y} - \mu K x' \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которых $E = (1/2)(x^2 + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2), K = x\dot{y} - \dot{x}y$

Если ввести новый вектор $r = (x, y)$, то синтезированные уравнения вида (3.1) можно записать в более короткой форме таким образом

$$\ddot{r} + r = \varepsilon(1 - r^2 - \dot{r}^2)\dot{r} + \mu r \times \dot{r} \times r. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) является двумерным аналогом уравнения Ван-дер-Поля с дополнительной стабилизацией квадратуры. Выписанному уравнению в переменной $\boldsymbol{r}$ соответствует уравнение в переменной $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$2\dot{x} = -\varepsilon S e_2 - \mu K e_3$$

(без ограничения общности мы здесь положили начальное значение энергии $E_0 = 1/2$).

Эта система четвёртого порядка легко сводится к системе второго порядка относительно S и K. Действительно, имеем

$$2\dot{S} = 2\frac{dS}{dx}\dot{x} = -\varepsilon S(e_2 \cdot e_2) - \mu K(e_2 \cdot e_3).$$

Аналогично, дифференцируя квадратуру K, получаем уравнение вида:

$$2\dot{K} = 2\frac{dK}{dx}\dot{x} = -\varepsilon S(e_3 \cdot e_2) - \mu K(e_3 \cdot e_3).$$

В публикации [4] было получено, что $(e_2 \cdot e_3) = 2K$ (см. матрицу Грама [4]). Кроме того, обозначим $(e_2 \cdot e_2) = (e_3 \cdot e_3) = x^2 = 2S + 1$, в результате находим искомые уравнения первого порядка [2]

$$\begin{aligned} 2\dot{S} &= -\varepsilon S(2S + 1) - 2\mu K^2, \\ 2\dot{K} &= -2\varepsilon SK - \mu K(2S + 1). \end{aligned}$$

Прямолинейные колебания фиксированной амплитуды в исходной системе будут асимптотически устойчивы, если асимптотически устойчива точка $S = K = 0$ в полученной системе. Для этого достаточно, чтобы $\varepsilon > 0, \mu > 0$. Фазовый портрет такой системы приведен [4]. Следует заметить, что в фазовом портрете имеется асимптотически устойчивая особая точка (K=0,S=0), означающая установившееся значение равной нулю квадратуры K и равной ¼ полной энергии колебаний.

Изложенная модель идеального двумерного обобщенного маятника Фуко находит техническое применение в качестве модели волнового твердотельного гироскопа [6, 7].

Список литературы

1. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа. (ВТГ) //. Известия РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6-19.
2. Журавлёв В.Ф. Решение уравнений линейного осциллятора относительно матрицы инерциального триэдра // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 491-495
3. Журавлёв В.Ф. Двумерный осциллятор Ван-дер-Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 2. С. 211-222.
4. Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (Волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2017.
5. Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во «Ким Л.А.», 2017. 197 с.
6. Журавлев В.Ф., Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б. Волновой твердотельный гироскоп - инерциальный датчик нового поколения // Материалы XXIV Санкт-Петербургской межд. конф. по интегрированным навигационным системам. С.Пб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 287-290.
7. Переляев С.Е., Бодунов С.Б., Журавлев В.Ф., Бодунов Б.П. Новые гироскопы семейства «обобщенный Маятник Фуко»: некоторые фундаментальные вопросы теории и прикладные аспекты ее внедрения в инженерную практику современной гироскопии. // 27-я Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам (ICINS), 2020.