УДК 517.938.5

# КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ КОРАНГА 1 ТИПИЧНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ НА 6-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

**М.В. Онуфриенко**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1

E-mail: mary.onufrienko@gmail.com

**Ключевые слова:** инвариантные функции, интегрируемые гамильтоновы системы, локальные особенности.

**Аннотация:** Гладкие семейства функций от двух переменных, инвариантных относительно действия произвольной конечной группы $G \subset SO(2)$ поворотами, встречаются вблизи параболических орбит с резонансами – компактных орбит ранга 1 интегрируемых систем с 2 степенями свободы, допускающих локально-свободное гамильтоново действие окружности (такие интегрируемые системы иногда называют полуторическими). Известно, что классификация компактных орбит коранга 1, встречающихся в интегрируемых системах с $n \geqslant 2$ степенями свободы, допускающих локально-свободное гамильтоново действие $(n-1)$-мерного тора, сводится к классификации особенностей, возникающих в гладких $(n-1)$-параметрических семействах функций от двух переменных, инвариантных относительно действия конечной группы $G \subset SO(2)$ поворотами. Таким образом, изложенные ниже результаты позволяют классифицировать особые орбиты указанного типа, возникающие в типичных интегрируемых системах.

## 1. Введение

В качественной теории интегрируемых систем важную роль играют структурно устойчивые особые орбиты, т.е. такие орбиты, в малой окрестности которых топология слоения Лиувилля сохраняется при малых интегрируемых возмущениях системы. Например, невырожденные особые орбиты являются структурно устойчивыми, согласно теореме Элиассона-Вея [2, 3] (см. также [6, 7]). Простейшая вырожденная особенность – параболическая орбита [8] – является структурно устойчивой [8] и даже гладко структурно устойчивой [9]. Гладкие семейства функций, инвариантных относительно действия коммутативной компактной группы Ли, возникают при изучении бифуркаций критических орбит интегрируемых гамильтоновых систем [6]. Например, гладкие семейства четных функций с группой симметрий из двух элементов возникают в интегрируемых гамильтоновых системах с 2 степенями свободы вблизи таких вырожденных орбит ранга 1, как «эллиптическое удвоение периода» и «гиперболическое удвоение периода» [11]. Гладкие семейства функций от четырех переменных, инвариантных относительно гамильтонова действия окружности $G \cong SO(2)$, встречаются вблизи таких вырожденных орбит коранга 2, как «интегрируемая гамильтонова бифуркация Хопфа» [14] и ее гиперболические аналоги. Все указанные выше типы вырожденных особых орбит встречаются во многих интегрируемых системах динамики твердого тела (см., например, [6, 10, 11]), магнитных геодезических потоках, инвариантных относительно вращений [5]; они являются структурно устойчивыми относительно вещественно-аналитических интегрируемых возмущений. Семейства четных функций встречаются во многих динамических системах (не обязательно интегрируемых, см., например, [13]).

Гладкие семейства функций от двух переменных, инвариантных относительно действия произвольной конечной группы $G \subset SO(2)$ поворотами, встречаются вблизи параболических орбит с резонансами [12] – компактных орбит ранга 1 интегрируемых систем с 2 степенями свободы, допускающих локально-свободное гамильтоново действие окружности (такие интегрируемые системы иногда называют полуторическими). Известно, что классификация компактных орбит коранга 1, встречающихся в интегрируемых системах с $n \geqslant 2$ степенями свободы, допускающих локально-свободное гамильтоново действие $(n-1)$-мерного тора, сводится к классификации особенностей, возникающих в гладких $(n-1)$-параметрических семействах функций от двух переменных, инвариантных относительно действия конечной группы $G \subset SO(2)$ поворотами. Таким образом, изложенные ниже результаты позволяют классифицировать особые орбиты указанного типа, возникающие в типичных интегрируемых системах.

## 2. Классификация $G$-инвариантных особенностей

В работе будут рассмотрены гладкие семейства функций $F(\mathbf{z}, \lambda)$ от двух переменных $\mathbf{z} = (x, y)$ и параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, инвариантных относительно поворота на угол $2\pi/s$ для целого числа $s \geqslant 2$:

$$F(A\mathbf{z}, \lambda) = F(\mathbf{z}, \lambda), \text{ где } A(x, y) = (x \cos \frac{2\pi}{s} - y \sin \frac{2\pi}{s}, x \sin \frac{2\pi}{s} + y \cos \frac{2\pi}{s}).$$

Другими словами, рассматриваются гладкие функции, инвариантные относительно действия конечной группы $G \subset SO(2)$, порожденной оператором поворота $\mathbf{z} \mapsto A\mathbf{z}$ (т.е. $G$-инвариантные функции).

**Предложение 1.** *Для любой конечной группы $G \subset SO(2)$ алгебра $\mathbb{R}[x, y]^G$ $G$-инвариантных многочленов от переменных $x, y$ мультипликативно порождена многочленами $|z|^2$, $\mathrm{Re}(z^s)$ и $\mathrm{Im}(z^s)$, где $s = |G|$, $z = x + iy$. В частности, ряд Тейлора в нуле любой $G$-инвариантной функции $f(\mathbf{z})$ имеет вид*

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{p,q=0}^{\infty} c_{p,q} |z|^{2p} z^{sq}\right), \tag{1}$$

*где $c_{p,q} = c_{p,q}(f) \in \mathbb{C}$, $c_{p,0} \in \mathbb{R}$.*

**Определение 1.** *Пусть $f = f(x, y)$ – гладкая $G$-инвариантная функция, заданная в окрестности точки $(0, 0)$, где $|G| = s \geqslant 2$. Будем говорить, что функция $f$ имеет* $G$-регулярную особенность *в точке $(0, 0)$, если $f^{(2)}_{z\bar{z}}(0, 0) \neq 0$ или*

$f^{(s)}_{z^s}(0,0) \neq 0$ *(т.е. хотя бы один из коэффициентов* $c_{1,0}, c_{0,1}$ *ряда Тейлора* (1) *отличен от нуля; другими словами, либо многочлен Тейлора степени* 2 *функции* $f(x,y)$ *отличен от константы, либо* $s > 2$ *и многочлен Тейлора степени* $s$ *не является многочленом от* $x^2 + y^2$.

Типом *$G$-регулярной особенности называется число* $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$*, равное числу «нулей» на диагонали матрицы Тейлора. Можно выделить 4 класса $G$-регулярных особенностей в соответствии с их типом: (i)* $k+1 < \frac{s}{2}$*, (ii)* $k = \frac{s-1}{2}$*, (iii)* $k = \frac{s}{2} - 1$*, (iv)* $s$ *четно,* $k \geqslant \frac{s}{2}$.

Гладкое 2-параметрическое семейство $G$-инвариантных функций назовем типичным при $s \geqslant 3$, если любая функция $f(x,y)$ этого семейства не является решением никакой из следующих систем уравнений на коэффициенты ее ряда Тейлора в нуле:

- система трех уравнений $f^{(2)}_{z\bar{z}}(0,0) = 0$, $\mathrm{Re} f^{(s)}_{z^s}(0,0) = 0$, $\mathrm{Im} f^{(s)}_{z^s}(0,0) = 0$ (эта система эквивалентна системе $c_{1,0} = \mathrm{Re} c_{0,1} = \mathrm{Im} c_{0,1} = 0$),

- система трех уравнений $f^{(2)}_{z\bar{z}}(0,0) = 0$, $3f^{(4)}_{z^2\bar{z}^2}(0,0) = \pm|f^{(s)}_{z^4}(0,0)|$, $f^{(6)}_{\bar{z}^3\bar{z}^3}(0,0) = 0$ в случае $s = 4$ (эта система эквивалентна системе $c_{1,0} = c^2_{2,0} - |c_{0,1}|^2 = c_{3,0}|c_{0,1}|^2 - c_{2,0}\mathrm{Re}(c_{1,1}\overline{c_{0,1}}) = 0$),

- система трех уравнений $f^{(2)}_{z\bar{z}}(0,0) = 0$, $f^{(4)}_{z^2\bar{z}^2}(0,0) = 0$, $10 f^{(6)}_{z^3\bar{z}^3}(0,0) = \pm|f^{(s)}_{z^6}(0,0)|$ в случае $s = 6$ (эта система эквивалентна системе $c_{1,0} = c_{2,0} = c^2_{3,0} - |c_{0,1}|^2 = 0$),

- система трех уравнений $f^{(2)}_{z\bar{z}}(0,0) = 0$, $f^{(4)}_{z^2\bar{z}^2}(0,0) = 0$, $f^{(6)}_{z^3\bar{z}^3}(0,0) = 0$ в случае $s \geqslant 7$ (эта система эквивалентна системе $c_{1,0} = c_{2,0} = c_{3,0} = 0$).

**Замечание 1.** *Пространство типичных семейств открыто и плотно в пространстве всех $C^\infty$-гладких 2-параметрических семейств $G$-инвариантных функций.*

**Теорема 1** ( [1]). ***(a)*** *В типичных 2-параметрических семействах гладких $G$-инвариантных функций* $F(\mathbf{z}, \lambda)$ *встречаются только особенности, приводящиеся к нормальной форме* $f_{s,k,a}(\mathbf{z}) = F_{s,k,a}(\mathbf{z}, 0)$, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

***(b)*** *Если* $F(\mathbf{z}, \lambda^*)$ *– типа* $f_{s,k,a}(\mathbf{z})$*, и* $\det \|F_{\lambda_i z^j \bar{z}^j}(\mathbf{0}, \lambda^*)\|^k_{i,j=1} \neq 0$*, то* $F$ *приводится к* $F_{s,k,a}$*, т.е.* $F(\mathbf{z}, \lambda) = F_{s,k,a(\lambda)}(\mathbf{w}(\mathbf{z}, \lambda), \nu(\lambda)) + \nu_0(\lambda)$.

$$F_{s,0}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^2, & s \in \{1,2\}, \\ \pm(x^2 + y^2) = \pm|z|^2, & s \geqslant 3, \end{cases}$$

$$F_{s,1,a}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^{s+2} & +\nu y^s, & s \in \{1,2\}, \\ \mathrm{Re}(z^3) & +\nu|z|^2, & s = 3, \\ \mathrm{Re}(z^s) + a|z|^4 & +\nu|z|^2, & s = 4,\ a^2 \neq 1; \quad s \geqslant 5,\ a \neq 0, \end{cases}$$

$$F_{s,2,a}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} \pm x^2 \pm y^{2s+2} & +\nu_2 y^{2s} + \nu_1 y^s, & s \in \{1,2\}, \\ \mathrm{Re}(z^4) \pm |z|^4 + a|z|^6 & +\nu_2|z|^4 + \nu_1|z|^2, & s = 4,\ a \neq 0, \\ \mathrm{Re}(z^5) + a|z|^6 & +\nu_2|z|^4 + \nu_1|z|^2, & s = 5, \\ \mathrm{Re}(z^s) + a_1|z|^6 + a_2|z|^8 & +\nu_2|z|^4 + \nu_1|z|^2, & s = 6,\ {a_1}^2 \neq 1, \\ & & s \geqslant 7,\ a_1 \neq 0. \end{cases}$$

# 3. Особенности интегрируемых гамильтоновых систем

Получена классификация (с точностью до послойного диффеоморфизма) особенностей коранга 1 типичных интегрируемых систем на 4- и 6-мерных симплектических многообразиях. Доказано, что вблизи орбиты коранга 1 слоение Лиувилля типичной интегрируемой системы диффеоморфно стандартной модели. Вблизи таких особенностей мы также изображаем фазовые портреты и их бифуркации. Наши особенности в 4-мерном случае представляют собой параболические орбиты с резонансами и бифуркации таких орбит в 6-мерном случае.

*Интегрируемая гамильтонова система* на $2n$-мерном симплектическом многообразии $(M, \omega)$ задается гладким отображением $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, где $\{f_i, f_j\} = 0$. Возникает *сингулярное лагранжево слоение* на $(M, \omega)$, слоями которого являются связные компоненты множеств $\mathcal{F}^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^n$. Регулярные компактные слои представляют собой торы Лиувилля. Предположим, что $M$ компактно. Тогда отображение $\mathcal{F}$ порождает гамильтониан $\mathbb{R}^n$-действие на $M$.

Рассмотрим класс $S = \mathcal{S}(M)$ интегрируемых систем на $M$ (называемых полуторическими), для которых функции $f_2, \dots, f_n$ порождают локально свободное гамильтоново действие $(n-1)$-тора на $M$.

*Локальная особенность* (т. е. компактная $\mathbb{R}^n$–орбита) интегрируемой системы $(M, \omega, \mathcal{F})$ называется *структурно устойчивой* если топология слоения сохраняется после любых (достаточно малых) интегрируемых возмущений системы в классе $\mathcal{S}$ (более формально, существует окрестность $U$ этой сингулярной орбиты такая, что любая интегрируемая система $(\overline{U}, \widetilde{\omega}, \widetilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{S}(\overline{U})$, достаточно близкой к заданной системе в $C^\infty$-топологии, может быть представлено как $\widetilde{\mathcal{F}} = \phi \circ \mathcal{F} \circ \Phi$, где $\Phi : \overline{U} \to M$ и $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – вложение и гомеоморфизм соответственно, близкие к тождествам). Если $\Phi$ – диффеоморфизм на свой образ, особенность называется *гладко структурно устойчивой.*

Определим *стандартную модель* интегрируемой системы на симплектическом многообразии

$$M_{st} = (D^2 \times D^{n-1} \times T^{n-1})/G, \quad \omega_{st} = dx \wedge dy + \sum_{i=1}^{n-1} dI_i \wedge d\varphi_i,$$

заданный инволютивным набором функций $I = (I_1, \dots, I_{n-1})$ и $G$-инвариантной функцией Гамильтона $H = H_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, \nu)$, $k = 1, 2$, где действие порождающей группы $G$ на указанное прямое произведение имеет вид $(x, y, I, \varphi) \mapsto (x\cos(2\pi\ell/s) - y\sin(2\pi\ell/s), x\sin(2\pi\ell/s) + y\cos(2\pi\ell/s), I, \varphi_1 + 2\pi/s, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, $0 < \ell < s$, $(\ell, s) = 1$. Функция Гамильтона определяется следующим образом: функции Морса $H_{s,0} = H^{\pm,\pm}_{s,0}(x, y) = \pm|z|^2 = \pm(x^2 + y^2)$ и $H_{s,0} = H^{+,-}_{s,0}(x, y) = x^2 - y^2$ (для $s = 1, 2$) и два семейства функций $H_{s,k,\alpha}(\mathbf{z}, \nu)$, $k = 1, 2$:

$$H_{s,1,\alpha}(\mathbf{z}, \nu) = \begin{cases} \pm x^2 + y^{s+2} & +\nu y^s, \quad s = 1, 2, \\ \mathrm{Re}(z^3) & +\nu|z|^2, \quad s = 3, \\ \mathrm{Re}(z^4) + \alpha|z|^4 & +\nu|z|^2, \quad s = 4, \ \alpha^2 \neq 1, \\ \mathrm{Re}(z^s) + |z|^4 & +\nu|z|^2, \quad s \geqslant 5, \end{cases}$$

$$H_{s,2,\alpha}(\mathbf{z},\nu)=\begin{cases}\pm x^2+y^{2s+2} & +\nu_2 y^{2s}+\nu_1 y^s, \quad s=1,2,\\ \mathrm{Re}(z^4)+|z|^4\pm|z|^6 & +\nu_2|z|^4+\nu_1|z|^2, \quad s=4,\\ \mathrm{Re}(z^5)+|z|^6 & +\nu_2|z|^4+\nu_1|z|^2, \quad s=5,\\ \mathrm{Re}(z^6)+\alpha|z|^6+|z|^8 & +\nu_2|z|^4+\nu_1|z|^2, \quad s=6,\ \alpha^2\neq 1,\\ \mathrm{Re}(z^s)+|z|^6+\alpha|z|^8 & +\nu_2|z|^4+\nu_1|z|^2, \quad s\geqslant 7.\end{cases}$$

Здесь $\nu=(\nu_i)\in\mathbb{R}^k$ – малый параметр, $\alpha\in\mathbb{R}$ – параметр, называемый *модулем.*

**Теорема 2** ( [1]). *Пусть* $n=\frac{1}{2}\dim M\in\{2,3\}$ *и* $\mathcal{S}_{st}\subseteq\mathcal{S}=\mathcal{S}(M)$ *обозначают класс систем, у которых все локальные особенности послойно диффеоморфны стандартным. Тогда* $\mathcal{S}_{st}$ *открыт и плотен в* $\mathcal{S}$ *относительно* $C^\infty$*-топологии.*

*Если фазовый портрет стандартной модели сохраняется с точностью до гомеоморфизма при малом изменении модуля* $\alpha$ *(например, модуль отсутствует), то любая особенность, послойно диффеоморфная ему, структурно устойчива (соответственно гладко структурно устойчив) относительно малых возмущений в классе* $\mathcal{S}$*.*

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

# Список литературы


1. Kudryavtseva E.A., Onufrienko M.V. Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. Vol. 30, No. 1. P. 76–94.
2. Eliasson L.H. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case // Commentarii mathematici Helvetici. 1990. Vol. 65, No. 1. P. 4–35.
3. Vey J. Sur certaines systèmes dynamiques séparables // Amer. J. Math. 1978. Vol. 100, No. 3. P. 591–614.
4. Wassermann G. Classification of singularities with compact Abelian symmetry // Singularities. Banach Center Publications. PWN, Warsaw, 1988. Vol. 20. P. 475–498
5. Кудрявцева Е.А., Ошемков А.А. Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения // Чебышевский сборник. 2001. Т. 21, Вып. 2. С. 244–265.
6. Kudryavtseva E.A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // European Journal of Mathematics. 2022. Vol. 8. P. 1487–1549.
7. Kudryavtseva E.A., Oshemkov A.A. Structurally stable nondegenerate singularities of integrable systems // Russian Journal of Mathematical Physics. 2022. Vol. 29, No. 1. P. 57–75.
8. Lerman L.M., Umanskii Ya.L. he structure of a Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold // Selecta Math. Sov. 1987. Vol. 6, No. 4. P. 365–396.
9. Kudryavtseva E.A., Martynchuk N.N., Existence of a smooth Hamiltonian circle action near parabolic orbits and cuspidal tori // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26, No. 6. P. 732–741.
10. Bolsinov A.V, Kudryavtseva E.A, Guglielmi L. Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2018. Vol. 376, No. 2131. P. 20170424.
11. Bolsinov A.V., Richter P.H., Fomenko A.T. The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top // Sb. Math. 2000. Vol. 191, No. 2. P. 151–188.
12. Калашников В.В. ипичные интегрируемые гамильтоновы системы на четырехмерном симплектическом многообразии // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, Вып. 2. С. 49–74.
13. Kudryavtseva E.A, Lakshtanov E.L. Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems. Cambridge, 2006. P. 173–214.
14. Van der Meer J.-C. The Hamiltonian Hopf Bifurcation // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1160. Berlin: Springer, 1985.