УДК 517.977, 514.765

ЭКСТРЕМАЛИ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ ЗАДАЧ

А.В. Подобряев

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

Россия, 152021, Ярославская обл., Переславский район, с. Веськово, ул. Петра I, 4а

E-mail: alex@alex.botik.ru

Ключевые слова: лоренцева геометрия, сублоренцева геометрия, антинорма, экстремальные траектории, каузальный тип, гамильтонова система.

Аннотация: Рассматриваются левоинвариантные (суб)лоренцевы структуры на группах Ли, заданные с помощью замкнутого выпуклого острого конуса и ассоциированной с ним антинормы в соответствующей алгебре Ли. Соответствующая задача оптимального управления заключается в поиске длиннейшей (в смысле данной антинормы) допустимой кривой, соединяющей две наперед заданные точки, такой, что ее скорость (управление) лежит в конусе. Сформулированы условия, при которых экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип.

1. Введение

В последние годы возрос интерес к левоинвариантным лоренцевым и сублоренцевым задачам с точки зрения геометрической теории управления. Был достаточно полно исследован ряд таких задач на группах Ли малых размерностей. Так, М. Гроховский [1, 2] начал изучение сублоренцевой геометрии на группе Гейзенберга. Это исследование было продолжено Ю. Л. Сачковым и Е. Ф. Сачковой [3, 4]. Э. Гронг и А. Васильев [5] рассматривали левоинвариантную сублоренцеву геометрию на пространстве анти-де Ситтера. См. также работы Ю. Л. Сачкова [6, 7] о левоинвариантной лоренцевой геометрии на плоскости Лобачевского.

В настоящей работе мы рассматриваем более общую постановку задачи, в которой левоинвариантная сублоренцева структура задана с помощью произвольного замкнутого выпуклого острого конуса в алгебре Ли и ассоциированной с ним непрерывной антинормы. С помощью принципа максимума Понтрягина выводится соответствующая гамильтонова система. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях нормальная экстремальная траектория сохраняет свой каузальный тип (т.е. ее касательный вектор всегда остается либо времениподобным, либо светоподобным). Кроме того, в отличие от римановой геометрии, анормальные экстремальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии. Эти анормальные траектории совпадают со светоподобными экстремальными траекториями, и тем самым, нестрого анормальны. В сублоренцевой геометрии, вообще говоря, анормальные экстремальные траектории могут иметь как светоподобные касательные векторы, так и касательные векторы, совпадающие с касательными векторами некоторых из субримановых анормальных траекторий, определяемых распределением плоскостей, которое линейно-порождено конусом. Если это распределение контактно, то анормальные экстремальные траектории светоподобны и нестрого анормальны.

2. Постановка задачи

Пусть G есть конечномерная связная вещественная группа Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. Рассмотрим замкнутый выпуклый острый конус $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}$ (т.е. не содержащий подпространств). Будем обозначать через $\operatorname{ri}\mathcal{C}$ его относительную внутренность, а через $\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C} = \mathcal{C} \setminus \operatorname{ri}\mathcal{C}$ его относительную границу.

Определение 1. *Антинормой* [8]*, ассоциированной с конусом* $\mathcal{C}$*, называется функция* $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *такая, что*

1. $\alpha|_{\operatorname{ri}\mathcal{C}} > 0$, $\alpha|_{\partial_{\mathrm{r}}\mathcal{C}} = 0$, $\alpha|_{\mathfrak{g}\setminus\mathcal{C}} = -\infty$*;*
2. *для любых* $v \in \mathfrak{g}$ *и* $\lambda > 0$ *выполнено равенство* $\alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v)$*;*
3. *для любых* $v, w \in \mathfrak{g}$ *выполнено* $\alpha(v+w) \geqslant \alpha(v)+\alpha(w)$*, т.е. функция* α *вогнута.*

Будем называть антинорму α *непрерывной, если функция* $\alpha|_{\mathcal{C}}$ *непрерывна.*

Рассмотрим следующую левоинвариантную задачу оптимального управления на группе Ли G. Требуется найти липшицеву кривую $g \in \operatorname{Lip}([0, t_1], G)$ и измеримое управление $u \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C} \setminus 0)$ такие, что

$$g(0) = \mathrm{id}, \qquad g(t_1) = g_1, \qquad \dot g(t) = L_{g(t)*}u(t), \qquad \int\limits_0^{t_1} \alpha(u(t))\, dt \to \max, \tag{1}$$

где $g_1 \in G$ есть наперед заданная точка, терминальное время t_1 свободно, а через L_g обозначен левый сдвиг на элемент $g \in G$.

Задача (1) обобщает как лоренцевы, так и субримановы и субфинслеровы задачи. Действительно, если антинорма α определяется невырожденной квадратичной формой сигнатуры $(1, n)$, например,

$$\alpha|_{\mathcal{C}}(u) = \sqrt{u_0^2 - u_1^2 - \cdots - u_n^2},$$

$$\mathcal{C} = \{u = (u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u_0^2 \geqslant u_1^2 + \cdots + u_n^2,\ u_0 \geqslant 0\},$$

то получается задача максимизации лоренцевой длины в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n}$. Если $\dim\mathcal{C} < \dim\mathfrak{g}$, то скорости допустимых кривых лежат в распределении подпространств вида $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}$, $g \in G$ в касательном расслоении TG, что обобщает субриманову постановку задачи [9]. Кроме того, в постановке задачи (1) рассматривается произвольная непрерывная антинорма. Заметим, что в случае произвольной нормы соответствующая задача минимизации называется (суб)финслеровой, поэтому задача (1) обобщает последнюю на случай антинормы.

В настоящей работе мы не будем затрагивать вопросы управляемости системы (1) и существования оптимального решения. Заметим лишь, что эти вопросы нетривиальны. Например, в лоренцевой задаче на пространстве анти де-Ситтера [5] имеется нетривиальное множество достижимости, а глобально оптимальные решения имеют ограниченную длину. Мы отсылаем к работе [10], в которой получены достаточные условия существования оптимального решения в рассматриваемой постановке. Здесь же изучаются лишь экстремальные траектории, т.е. траектории, удовлетворяющие необходимому условию оптимальности – принципу максимума Понтрягина.

3. Экстремальные траектории

Напомним некоторые необходимые определения из выпуклого анализа. Всюду ниже V^* обозначает двойственное пространство векторного пространства V, а $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$

каноническое спаривание ковекторов и векторов.

Определение 2. *Конус* $\mathcal{C}^\vee = \{p \in V^* \,|\, p|_\mathcal{C} \leqslant 0\} \subset V^*$ *называется отрицательным двойственным конусом для конуса* $\mathcal{C}$. *Антисферой радиуса* r *антинормы* α *называется множество* $S_r = \{v \in V \,|\, \alpha(v) = r\}$. *Двойственной функцией для функции* α *называется функция* $\alpha^\vee : V^* \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *такая, что*

$$\alpha^\vee(p) = -\sup_{v \in S_1} \langle p, v\rangle, \qquad p \in V^*.$$

Дадим определение экстремальной траектории задачи (1).

Зададим семейство функций $H_u^\nu : T^*G \to \mathbb{R}$ на кокасательном расслоении группы G, зависящее от параметров $u \in \mathcal{C} \setminus 0$ и $\nu \in \{0, 1\}$, с помощью формулы:

$$H_u^\nu(\lambda) = \langle L_{\pi(\lambda)}^* \lambda, u\rangle + \nu\alpha(u), \qquad \lambda \in T^*G.$$

Определение 3. *Кривая* $\lambda \in \mathrm{Lip}([0, t_1], T^*G)$ *называется экстремалью, если* $t_1 > 0$ *и существуют допустимое управление* $\hat{u} \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C} \setminus 0)$ *и число* $\nu \in \{0, 1\}$ *такие, что* $(\lambda, \nu) \neq 0$ *и для почти всех* $t \in [0, t_1]$ *выполнено*

$$\dot{\lambda}(t) = \vec{H}_{\hat{u}(t)}^\nu(\lambda(t)), \qquad H_{\hat{u}(t)}^\nu(\lambda(t)) = \max_{u \in \mathcal{C} \setminus 0} H_u^\nu(\lambda(t)), \qquad H_{\hat{u}(t)}^\nu(\lambda(t)) = 0,$$

где через $\vec{H}_{\hat{u}(t)}^\nu$ *обозначено гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану* $H_{\hat{u}(t)}^\nu$ *относительно канонической симплектической структуры на кокасательном расслоении* T^*G.

Кривая λ *называется нормальной/анормальной экстремалью, если* $\nu = 1$ (*соответственно,* $\nu = 0$). *Пусть* $\pi : T^*G \to G$ – *естественная проекция. Кривая* $\pi \circ \lambda : [0, t_1] \to G$ *называется нормальной/анормальной экстремальной траекторией. Анормальная экстремальная траектория строго анормальна, если она не является проекцией никакой нормальной экстремали.*

Если $(\hat{g}, \hat{u})$ есть оптимальный процесс для задачи (1), то в соответствии с принципом максимума Понтрягина [11, 12] кривая $\hat{g}$ является экстремальной траекторией, соответствующей управлению $\hat{u}$.

Отметим, что в случае произвольной антинормы α максимизированный гамильтониан, вообще говоря, негладок. Поэтому уравнения $\dot{\lambda}(t) = \vec{H}_{\hat{u}(t)}^\nu(\lambda(t))$ следует понимать как семейство гамильтоновых векторных полей. Другими словами, гамильтонова система неавтономна и зависит от управления.

Так как гамильтонианы $H_{\hat{u}(t)}^\nu$ левоинвариантны, то гамильтоновы векторные поля $\vec{H}_{\hat{u}(t)}^\nu$ определяются своими вертикальными составляющими. Более точно, что функции $H_{\hat{u}(t)}^\nu$ определены на двойственном пространстве алгебры Ли $\mathfrak{g}^* = T_{\mathrm{id}}^*G$ с координатами $h_1 = \langle \cdot, e_1\rangle, \dots, h_n = \langle \cdot, e_n\rangle$, где $e_1, \dots, e_n$ – некоторый базис пространства $\mathfrak{g}$. Тогда экстремаль $\lambda(t)$ определяется сопряженной подсистемой (гамильтоновой системы) $\dot{h}_i(t) = \{H_{\hat{u}(t)}^\nu, h_i(t)\}$ на пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $h(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) = L_{\pi(\lambda(t))}^* \lambda(t)$, а $\{\cdot\,, \cdot\}$ есть стандартная пуассонова структура на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Для ковектора $p \in \mathfrak{g}^*$ введем обозначение $u_p = \arg\max\limits_{u \in \mathcal{C} \setminus 0} H_u^\nu(p)$. Вообще говоря, u_p определено неоднозначно. Ковектор $h(0) \in \mathfrak{g}^*$ и выбор значений управления $u(t) = u_{h(t)}$ однозначно определяет экстремаль $\lambda(t)$ с начальным условием $\lambda(0) = h(0)$.

Определение 4. *Будем называть касательный вектор в точке* $g \in G$ *времениподобным* (*соответственно, светоподобным*), *если он лежит в* $L_{g*} \operatorname{ri} \mathcal{C}$ (*соответственно, в* $L_{g*} \partial_{\mathrm{r}} \mathcal{C}$). *Траектория называется времениподобной/светоподобной, если каждый ее касательный вектор времениподобен/светоподобен.*

Теорема 1. *Рассмотрим задачу оптимального управления* (1), *заданную замкнутым выпуклым острым конусом* $\mathcal{C}$ *и ассоциированной с ним непрерывной антинормой* α *такой, что функция* $\alpha^\vee$ *является антинормой, ассоциированной с конусом* $\mathcal{C}^\vee$. *Тогда всякая экстремальная траектория* $g(\cdot)$ *является решением уравнения* $\dot g(t) = L_{g(t)*}u_{h(t)}$, *где* $\dot h_i(t) = \{H_{u_{h(t)}}, h_i(t)\}$ *и* $H_{u_{h(t)}} = \langle h(t), u_{h(t)}\rangle$.

(1) *Если траектория нормальна, то выполнено одно из двух условий*:

(а) $h(t) \in S_1^\vee = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid \alpha^\vee(p) = 1\}$ *для всех* t *и траектория времениподобна*;

(б) $h(t) \in S_0^\vee = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid \alpha^\vee(p) = 0\}$ *для всех* t *и траектория светоподобна.*

(2) *Касательные векторы анормальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами субримановых анормальных траекторий, которые определяются распределением подпространств* $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C} \subset T_gG$. *В частности, светоподобные дуги нестрого анормальны.*

4. Некоторые следствия

Рассмотрим (суб)лоренцеву структуру, заданную невырожденной квадратичной формой с одним отрицательным собственным значением. Для описания (суб)лоренцевых экстремальных траекторий мы используем гамильтонов формализм принципа максимума Понтрягина. Трудность заключается в том, что (суб)лоренцев функционал длины содержит квадратный корень, а оптимизационная задача заключается в максимизации этого функционала, в отличие от (суб)римановой задачи, цель которой заключается в минимизации соответствующего функционала длины. Поэтому стандартный для субримановой геометрии [9] трюк замены функционала длины на функционал энергии [12] в (суб)лоренцевом случае не работает. Напомним, что при этом используется неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$l(g)^2 = \left(\int_0^{t_1} \sqrt{q(\dot g(t))}\,dt\right)^2 \leqslant t_1 \cdot \int_0^{t_1} q(\dot g(t))\,dt = 2t_1 J(g),$$

где $g : [0, t_1] \to G$ есть допустимая траектория, длина касательного вектора которой определяется квадратичной формой q, а через $l(g)$ и $J(g)$ обозначены длина и энергия кривой g, соответственно. Важно, что равенство выше достигается только на кривых постоянной скорости.

Тем не менее, оказывается, что «энергия» может быть использована в (суб)лоренцевом случае для описания нормальных экстремалей. Будем говорить, что траектории *геометрически совпадают*, если совпадают их образы как функции времени.

Следствие 1. *Пусть антинорма* α *задается квадратичной формой* q *сигнатуры* $(1, r)$ *на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$, *т.е.* $\alpha(u) = \sqrt{q(u)}$, *где в некотором базисе* $e_0, e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеем* $q(u) = u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_r^2$. *Тогда нормальные экстремальные траектории задачи* (1) *геометрически совпадают с нормальными времениподобными или светоподобными экстремальными траекториями той же управляемой системы с квадратичным функционалом*

$$\frac{1}{2}\int_0^{t_1} \left(u_0^2(t) - u_1^2(t) - \dots - u_r^2(t)\right)\,dt \to \max$$

с фиксированным терминальным временем t_1 *и управлением* $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{g} \setminus 0)$.

Вообще говоря, поведение анормальных траекторий может быть сложным. Соответствующие траектории сопряженной подсистемы лежат на относительной границе двойственного конуса $\partial_{\mathrm{r}}(\mathcal{C}^{\vee})$ и характер их пересечения с аннулятором пространства $\operatorname{span}\mathcal{C}$ априори не ясен. Однако, в некоторых случаях анормальные траектории могут быть описаны. В частности, следующее следствие показывает, что анормальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии, в отличие от римановой геометрии, где нет анормальных траекторий.

Следствие 2. *В лоренцевом случае, т.е. при* $\operatorname{span}\mathcal{C} = \mathfrak{g}$, *анормальные экстремальные траектории светоподобны, в частности, нестрого анормальны.*

Определение 5. *Распределение плоскостей* Δ *на трехмерном гладком многообразии* M *называется контактным, если существует 1-форма* ω *такая, что* $\Delta_m = \operatorname{Ker}\omega_m$ *для любой точки* $m \in M$ *и* $\omega \wedge d\omega \neq 0$.

Следствие 3. *Если распределение плоскостей* $L_{g*}\operatorname{span}\mathcal{C}$ *контактно, то все анормальные траектории сублоренцевой задачи* (1) *светоподобны и, в частности, нестрого анормальны.*

5. Заключение

Рассмотрены экстремальные траектории для левоинвариантных (суб)лоренцевых задач, определяемых произвольной непрерывной антинормой на остром конусе. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Касательные векторы анормальных экстремальных траекторий, вообще говоря, либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых анормальных траекторий. Если антинорма задается квадратичной формой своей сигнатуры, то для вывода уравнений экстремальных траекторий можно избавиться от квадратного корня в функционале сублоренцевой длины и использовать квадратичный гамильтониан.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00140, https://rscf.ru/project/22-11-00140/.

Список литературы

1. Grochowski M. On the Heisenberg sub-Lorentzian metric on $\mathbb{R}^3$ // Geometric singularity theory. Banach Center publications. Institute of Mathematics. Polish Academy of Sciences. Warszawa, 2004. Vol. 65. P. 57–65.
2. Grochowski M. Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // Journal of Dynamical and Control Systems. 2006. Vol. 12, No. 2. P. 145–160.
3. Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. Сублоренцева задача на группе Гейзенберга // Математические заметки. 2023. Т. 113, № 1. С. 154–157.
4. Sachkov Yu.L., Sachkova E.F. Sub-Lorentzian distance and spheres on the Heisenberg group // Journal of Dynamical and Control Systems. 2023. Vol. 29. P. 1129–1159.
5. Grong E., Vasil'ev A. Sub-Riemannian and sub-Lorentzian geometry on $SU(1,1)$ and on its universal cover // J. Geom. Mech. 2011. Vol. 3, No. 2. P. 225–260.
6. Сачков Ю.Л. Лоренцева геометрия на плоскости Лобачевского // Математические заметки. 2023. Т. 114, № 1. С. 154–157.
7. Sachkov Yu.L. Lorentzian distance on the Lobachevsky plane // arXiv:2307.07706. 2023.
8. Protasov V.Yu. Antinorms on cones: duality and applications // Linear and Multilinear Algebra. 2021. Vol. 70, No. 22. P. 7387–7413.
9. Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge University Press, 2019.
10. Lokutsievskiy L.V., Podobryaev A.V. Existence theorem for sub-Lorentzian problems // arXiv:2401.07975. 2024.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
12. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.