УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВЛАГИ В ШАРЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76
E-mail: sviridyukga@susu.ru

Н.С. Гончаров
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76
E-mail: goncharovns@susu.ru

Ключевые слова: система Вентцеля, уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, производная Нельсона – Гликлиха

Аннотация: В работе исследуются детерминированная система Вентцеля уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, описывающих процесс фильтрации влаги в трехмерном шаре и на его границе. Отметим, что для изучаемой системы фильтрации рассматривается неклассическое условие Вентцеля, поскольку оно представлено уравнением с оператором Лапласа – Бельтрами, заданным на границе области, понимаемой как гладкое компактное риманово многообразие без края, причем внешнее воздействие представлено нормальной производной функции, заданной в области. В частности, в детерминированном случае доказывается однозначная разрешимость начальной задачи для системы Вентцеля в специфическом построенном гильбертовом пространстве, решение которой позволяет определять прогнозы количественного изменения геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации На основе модифицированного метода Галеркина строится алгоритм нахождения численного решения системы Вентцеля уравнений фильтрации в шаре и на его границе. Проведено численное исследование и представлен результат вычислительного эксперимента.

1. Введение

Фильтрация жидкости как и ее течение, диффузия, падение и т.д. является одним из процессов влагопереноса. Исследование этих процессов начинается с изучения их математических моделей. Рассмотрим одну из математических моделей фильтрации. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – связная ограниченная область с границей Γ класса C^∞ . На компакте $\Omega \cup \Gamma$ задана система уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной [1], моделирующая процесс фильтрации жидкости

$$(1) \qquad (\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + \beta u, \ u = u(t, x), \ (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

(2) $$(\lambda - \Delta)v_t = \gamma\Delta v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta v,\ v = v(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma,$$

(3) $$tru = v,\ \text{на } \mathbb{R} \times \Gamma,$$

Здесь символом в (1) обозначен оператор Лапласа в области Ω, а в (2) тем же символом обозначен оператор Лапласа – Бельтрами на гладком римановом многообразии Γ . Символом $\nu = \nu(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$, обозначена внешняя по отношению к $\mathbb{R} \times \Gamma$ нормаль к $\mathbb{R} \times \Omega$. Параметры $\alpha, \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Ранее [2] мы, следуя традиции [3] - [5], условие вида (2), в котором порядок производных по пространственным переменным не ниже порядка по тем же в (1), называли краевым условием Вентцеля. Однако намереваясь в будущем рассматривать различные случаи Ω и Γ (например, Ω – ограниченное связное риманово многообразие с краем Γ) считаем необходимым называть (1), (2) системой уравнений, пусть и заданных на множествах разной геометрической размерности. В поддержку этого говорит тот факт, что уравнения (1), (2) описывают один и тот же физический процесс фильтрации жидкости. Термин же «краевые условия» следует оставить за уравнениями, заданными на границе (краю) области (многообразия) и имеющих меньший порядок производных по пространственным переменным (см. классический трактат [6], а также [7]). Название система уравнений Вентцеля подчеркивает заслуги первооткрывателя [8] нового раздела математической физики.

Разрешимость системы (1), (2) будем изучать в самом простом случае: $\Omega = \{(r,\theta,\varphi) : r \in [0,R), \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]\}$ – шар в $\mathbb{R}^3$, а $\Gamma = \{(\theta,\varphi) : \theta \in [0,\pi), \varphi \in [0,2\pi)\}$ – ограниченный шар. В этом случае (1), (2) преобразуется к виду

(4) $$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha\Delta_{r,\theta,\varphi}u + \beta u,\ u = u(t,r,\theta,\varphi),\ (t,r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

(5) $$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \gamma\Delta_{\theta,\varphi}v + \partial_R u + \delta v,\ v = v(t,\theta,\varphi),\ (t,\theta,\varphi) \in \mathbb{R} \times \Gamma,$$

где

(6) $$\begin{gathered}\Delta_{r,\theta,\varphi} = (r-R)\frac{\partial}{\partial r}\left((R-r)\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\\ \Delta_{\theta,\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r}\bigg|_{r=R}.\end{gathered}$$

К данной системе присовокупим условие согласования (3) и снабдим ее начальными условиями

(7) $$u(0,r,\theta,\varphi) = u_0(r,\theta,\varphi), \quad v(0,\theta,\varphi) = v_0(\theta,\varphi).$$

Целью нашей работы является доказательство разрешимости системы Вентцеля уравнений фильтрации в шаре и на его границе. В частности, в детерминированном случае рассматривается существование и единственность системы Вентцеля уравнений в шаре и на его границе

2. Детерминированный случай

Рассмотрим следующий ряд

$$
\begin{aligned}
u = \sum_{k=2}^{\infty} exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{R^k}\bigg(a_k \sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)+\\
+ b_k \cos k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)\bigg) + \sum_{k=1}^{\infty} exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\bigg(c_k \sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)+\\
+ d_k \cos k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)\bigg),
\end{aligned} \tag{8}
$$

где

$$a_k = \int_0^{2\pi}\int_0^R u_0(r,\theta,\varphi)\frac{(R-r)^k}{R^k}\sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)rdrd\varphi,$$

$$b_k = \int_0^{2\pi}\int_0^R u_0(r,\theta,\varphi)\frac{(R-r)^k}{R^k}\cos k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)rdrd\varphi,$$

$$c_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_0(\theta,\varphi)\sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)d\theta d\varphi,$$

$$d_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_0(\theta,\varphi)\cos k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)d\theta d\varphi.$$

Нетрудно заметить, что построенный ряд выше является формальным решением уравнения (4). Причем, если ряды в (8) равномерно сходятся, то перед нами решение задачи (4), (7), где $\partial_R u = 0$. Учитывая это, можно построить решение задачи (5), (7)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} exp\left(t\frac{\delta-\gamma k^2}{\lambda+k^2}\right)\left(c_{k,n}\cos k\varphi + d_{k,n}\sin k\varphi\right) \tag{9}$$

где в случае $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ решения задачи (5) – (7) будут удовлетворять условию согласования (3).

Замыкание линеала $\operatorname{span}\{(R^k)^{-1}(R-r)^k\sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi),\ (R^k)^{-1}(R-r)^k\cos k\theta\cdot\cdot(\sin k\varphi+\cos k\varphi)\colon k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}, r\in(0,R), \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi)\}$ порожденное скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее, замыкание линеала $\operatorname{span}\{\sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi),\ \cos k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)\colon k\in\mathbb{N}, \theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi)\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)d\theta d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых* $u_0 \in A(\Omega)$ *и* $v_0 \in A(\Gamma)$ *таких, что выполнено* (3), *и для коэффициентов* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, *таких, что выполнено следующее условие* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, *а* $\lambda \neq k^2$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *существует единственное решение* $(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}; A(\Omega) \oplus A(\Gamma))$ *задачи* (3) – (5).

Используя теоретические результаты, полученные в работах [2, 9], был разработан и реализован модифицированный алгоритм Галеркина для нахождения приближенного решения системы Вентцеля уравнений фильтрации в шаре и на его границе.

Пример. Требуется найти решение системы Вентцеля уравнений фильтрации в шаре и на его границе (3) – (5) при следующих условиях: $\beta = 1$, $\alpha = 3$, $\lambda = 2$, $R = 1$, $t_0 = 0.000001$, $N = 10$.

Будем искать приближенное решение с помощью модифицированного метода Галеркина, поскольку уравнение Баренблатта – Желтова – Кочина может быть вырожденным. Построим приближенное решение системы Вентцеля – Коши методом Галеркина в следующем виде

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x,t) &= u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t)\varphi_k(x), \\ \widetilde{v}(x,t) &= v_N(x,t) = \sum_{l=1}^{N} v_k(t)\psi_l(x), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ являются собственными функциями модифицированного оператора Лапласа $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ и соответствуют его собственным значениям, ортонормальным по норме $< \cdot, \cdot >_{A(\Omega)}$, которые нумеруются в не возрастающем порядке с учетом кратности; $\{\psi_l : l \in \mathbb{N}\}$ являются собственными функциями модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{\theta,\varphi}$ и соответствуют его собственным значениям, ортонормальным по норме $< \cdot, \cdot >_{A(\Gamma)}$, которые нумеруются в не возрастающем порядке с учетом кратности. Подставляя приближенные решения в систему Вентцеля и решая систему алгебро-дифференциальных уравнений, получаем решение, представленное на следующем рисунке.

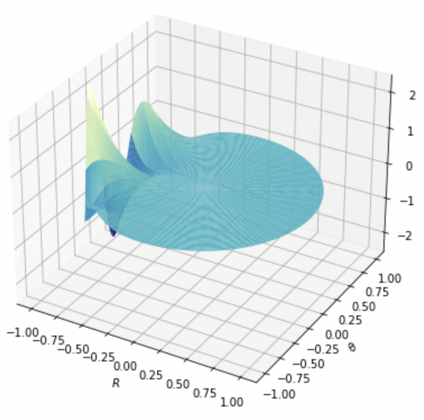

Рис. 1. График функции $\widetilde{u}(r, \theta, \varphi, t)$ при $t = 0.000001$

Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, 5, С. 852–864.
2. Goncharov N.S., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Non-Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems with Wentzell Condition // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2021. Т. 14, 4, С. 102–105.
3. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problem for Dynamical Sobolev-Type Equation in the Space of Noises // Electron. J. Evol. Equ. 2018. V. 2018, 128, P. 1–10.
4. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The multipoint initial-final value condition for the Hoff equations in geometrical graph in spaces of K-«noises» // Mediterr. J. Math. 2022. V. 19, 2, P. 53.
5. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of «Noises» // Abstract and Applied Analysis. 2015. V. 2015, P. 8.
6. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive "White Noise" // Communications on Pure and Applied Analysis. 2016. V. 15, 1, P. 185–196.
7. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M. Linear Sobolev Type Equations with Relatively-Sectorial Operators in Space of "Noises" // Abstract and Applied Analysis. 2016. V. 13, P. 4607.
8. Lions J.L., Magenes E. Problems Aux Limites Non homogenes et Applications. Dunod: Paris, 1968.
9. Гончаров Н.С., Загребина С.А., Свиридюк Г.А. Задачи Шоуолтера – Сидорова и Коши для линейного уравнения Дзекцера с краевыми условиями Вентцеля и Робена в ограниченной области // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14, 1, С. 50–63.
10. Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятности и ее применения. 1959. Т. 4, 2, С. 172–185.
11. Gliklikh, Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, 2011.
12. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential Dichotomies in Barenblatt – Zheltov – Kochina Model in Spaces of Differential Forms with «Noise» // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. Т. 12, 2, С. 47–57.
13. Goncharov N.S. Stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina Model on the Interval with Wentzell Boundary Conditions // Global and Stochastic Analysis. 2020. V. 7, 1, P. 11–23.