УДК 517.977, 514.747

ВЫЯВЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ОБОБЩЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

А.А. Успенский

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, С. Ковалевской ул., 16

E-mail: uspen@imm.uran.ru

П.Д. Лебедев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, С. Ковалевской ул., 16

E-mail: pleb@yandex.ru

Ключевые слова: быстродействие, функция оптимального результата, сингулярность, уравнение Беллмана-Айзекса, минимаксное решение.

Аннотация: Решения задач оптимального управления зачастую не обладают свойством дифференцируемости, что создает серьезные трудности при их построении как в аналитической форме, так в аппроксимационном виде. В докладе рассматривается один класс плоских задач управления по быстродействию, в котором в качестве целевого множества выбирается замкнутое и в общем случае невыпуклое множество. Построение функции оптимального результата здесь связано с исследованием свойств метрической проекции на целевое множество. При этом множество ближайших точек на целевом множестве может содержать более одной точки, что влечет возникновение у решения сингулярности. Предлагается подход к построению негладкой функции оптимального результата, базирующийся на свойствах т.н. альфа-множеств. Понятие альфа-множества обобщает понятие выпуклого множества и в рамках изучаемого класса задач позволяет выявить и сформировать, аналитически или численно, сингулярное множество решения задачи управления.

1. Введение

Сфера приложений выпуклых множеств и теории двойственности обширна и многообразна. Между тем в приложениях, в частности, в теории оптимального управления часто необходимо использовать множества, не являющихся выпуклыми, но опосредованно с ними связанными. Среди обобщений понятия выпуклого множества выделим понятие альфа-множества [1]. Следует различать это понятие с понятием α-выпуклого множества, которое введено в работе [2]. В работе [3] его предложено называть «множеством, слабо выпуклым по Ефимову-Стечкину с константой α». Возникновение понятия альфа-множества связано с изучением свойств множеств достижимости управляемых динамических систем. Множества достижимости часто невыпуклы, при этом их невыпуклость имеет разную степень выраженности. Для конкретного множества в качестве числовой характеристики его степени невыпуклости была предложена [1] неотрицательная константа α, являющаяся супремальным значением функции, определенной на дополнении множества до всего пространства. Значения функции имеют смысл угловых величин, вычисляемых между векторами, порожденными ближайшими точками на множестве. Чем больше эта угловая величина, тем заметнее множество по своим свойствам отличается от своей выпуклой оболочки. К настоящему времени выявлены и описаны характерные признаки и особенности замкнутых множеств евклидова пространства в терминах этой функции. Осуществлена классификация невыпуклых множеств по признакам регулярности и мажорируемости (в силу введенных определений). Введены в рассмотрение основные структурные элементы развиваемой теории (биссектриса множества, псевдовершина множества, крайняя точка биссектрисы, обобщенная гиперплоскость). Для некоторых классов невыпуклых множеств сформулированы и доказаны утверждения, аналогичные теоремам из выпуклого анализа о существовании опорной гиперплоскости выпуклого множества и об отделимости выпуклых множеств в евклидовом пространстве. Установлена взаимосвязь между альфа-множествами и другими обобщениями выпуклых множеств, в частности, между альфа-множествами и слабо выпуклыми по Виалю множествами. Созданы основы соответствующего дифференциального исчисления. Указанные результаты опубликованы циклом работ, среди которых [4–8]. Существуют иные подходы к построению решений задач управления, в том числе задач в игровой постановке, основанные на различных обобщениях понятия выпуклого множества, см., например, монографию [2], там же содержится обзор обобщений понятия выпуклого множества.

2. Постановка задач

Изучается задача управления по быстродействию с круговой единичного радиуса вектограммой скоростей, которая формализуется в виде краевой задачи Дирихле для соответствующего уравнения Беллмана-Айзекса:

$$\min_{\nu\colon \|\nu\|\leqslant 1}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+1=0,\ \ u|_{\Gamma}=0. \tag{1}$$

Здесь $\|\nu\|=\sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2}$ – евклидова норма вектора $\nu=(\nu_1,\nu_2)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Краевое условие в (1) определено на границе $\Gamma=\partial M$ замкнутого множества $M\subset\mathbb{R}^2$, которое в задаче управления по быстродействию идентифицируется в качестве целевого множества. При этом не имеющая точек самопересечения кривая $\Gamma=\{\gamma(t)\colon t\in T\}$ задается непрерывным отображением $\gamma\colon T\to\mathbb{R}^2$ числового интервала $T=(\hat{t},\check{t})$, $-\infty<\hat{t}<\check{t}<+\infty$, на плоскость, которое вообще говоря может иметь конечное число точек разрыва производных начальных порядков от координатных функций. А именно, $\gamma\in C^k(T)$, при этом анализируются случаи в диапазоне от $k=0$ (кусочно-гладкий случай) до $k=3$ (случай наличия у кривой гладкой кривизны). Минимаксное решение [8] задачи Дирихле (1) совпадает с функцией оптимального результата $u = u(x, y)$ в соответствующей задаче управления по быстродействию [9]. Прослеживается связь этого минимаксного решения с обобщенным эйконалом, подробнее, например, в [10].

Структура минимаксного решения задачи (1) известна [9]:

$$u(x,y) = \rho\big((x,y), M\big), \tag{2}$$

где $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf\limits_{\mathbf{m}\in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ – евклидово расстояние от точки $\mathbf{x} = (x, y)$ до множества M.

Далее уместно использовать некоторые конструкции геометрической теории приближений. Здесь привлечем оператор метрической проекции $P_M(\mathbf{x})$ точек на M. Известно [11], что решение уравнения эйконала, а значит и минимаксное (2) задачи (1), является гладким на всей области рассмотрения в случае одноэлементности значений $P_M(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, т.е. когда $\operatorname{card} P_M(\mathbf{x}) = 1$. Такая ситуация в рассматриваемых задачах реализуется в случае выпуклости краевого множества M. Тогда M является «солнцем» [12]. В общем же случае, когда M невыпуклое множество, свойством солнечности M не обладает, поскольку количество проекций точек из его дополнения может отличаться от единицы, здесь $\operatorname{card} P_M(\mathbf{x}) > 1$.

Определение 1. Биссектрисой множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется

$$L = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M \colon \operatorname{card} P_M(\mathbf{x}) > 1\right\}.$$

Применительно к рассматриваемой задаче управления по быстродействию множество L состоит из точек, из которых выходят не менее двух оптимальных траекторий. Таким образом, биссектриса L множества $M \subset \mathbb{R}^2$ является множеством сингулярности функции оптимального результата. Стоит отметить, что биссектриса относится к множествам симметрии (см. [13]). С точки зрения геометрической оптики биссектриса – множество точек, в которых нарушается гладкость волновых фронтов [11].

3. Методы построения решения задачи (1)

Случай выпуклого краевого множества M тривиален, здесь $L = \varnothing$, ибо $\operatorname{card} P_M(\mathbf{x}) = 1$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$. Интерес представляет случай, когда M – невыпуклое множество. Для второго случая развит теоретический аппарат выявления сингулярных множеств. Отметим, что решение краевой задачи (1) – супердифференцируемая функция, множество негладкости (сингулярное множество) которой состоит из гладких многообразий (ветвей), на которых мера невыпуклости [1] краевого множества строго больше нуля. Таким образом, задача построения сингулярного множества сводится к задаче построения носителя угловой функции, определяющей меру невыпуклости целевого множества и может быть решена с помощью конструкций теории альфа-множеств [4, 6]. Показано, что структура сингулярного множества определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. Разработан численно-аналитический конструктор для построения основных структурных элементов функции оптимального результата – псевдовершин целевого множества (например, [10]), крайних точек сингулярного множества (формулы в [4]), ветвей сингулярных кривых (например, [8]). Также разработаны новые алгоритмы, позволяющие находить конструктивные элементы. В частности, для каждой псевдовершины вычисляются ее маркеры – числовые характеристики псевдовершины. Маркеры (левый и правый) определяются решениями уравнения типа золотой пропорции, которое устанавливает связь между характеристиками уравнения (1) и геометрией краевого множества (подробнее см. [10]). Маркеры находятся с помощью численных процедур, а в ряде случаев – точно по формулам.

4. Пример

Пусть требуется решить задачу (1), выделив сингулярное множество, если целевое множество M ограниченно сверху кривой $\Gamma = \big\{\big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \colon t \in (-\infty, +\infty)\big\}$, где

$$(3) \qquad x(t) = \begin{cases} t - 0.5\,\mathrm{th}\,t, t \in (-\infty, 0], \\ 0.5\sin t, t \in (0, \pi/2], \\ 0.5, t \in (\pi/2, +\infty), \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} \mathrm{ch}\,t + 0.5\,\mathrm{sch}\,t - 1, t \in (-\infty, 0], \\ 0.5\cos t, t \in (0, \pi/2], \\ \pi - 0.5t, t \in (\pi/2, +\infty). \end{cases}$$

На границе множества есть одна псевдовершина $\mathbf{x}_0 = \big(x(t_0), y(t_0)\big) = (0, 0.5)$,

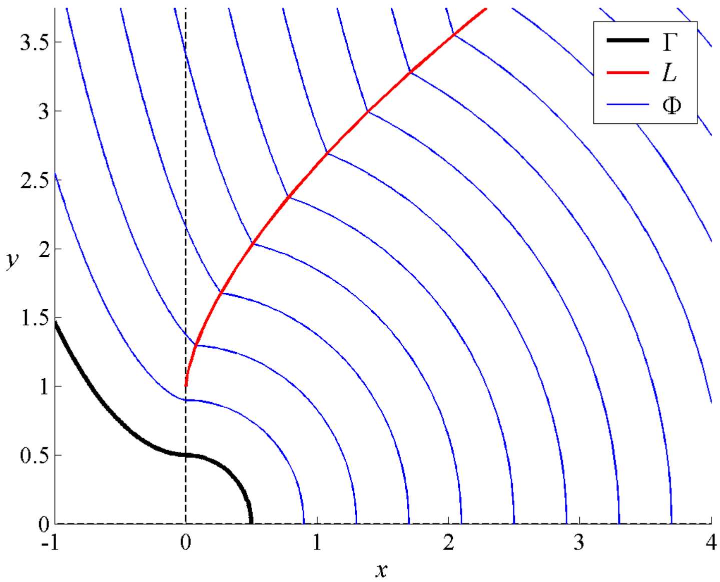

Рис. 1. Кривая Γ, синуглярное множество L и линии уровня Φ функции $u(x, y)$.

соответствующая значению параметра $t_0 = 0$. В ее окрестности параметры $t_1 \in \mathbb{R}$ и $t_2 \in \mathbb{R}$, задающие координаты точек, в которые приходят оптимальные траектории с биссектрисы L, связаны диффеоморфизмом

$$t_2(t_1) = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t_1(\mathrm{ch}\,t_1 - 1) - t_1^2\,\mathrm{sh}\,t_1 + \mathrm{sh}\,t_1(\mathrm{ch}\,t_1 - 1)^2}{2t_1\,\mathrm{sh}\,t_1(\mathrm{ch}\,t_1 - 1) + t_1^2 - (\mathrm{ch}\,t_1 - 1)^2}$$

с предельным значением $\lim\limits_{t_1 \to -0} \frac{t_2(t_1)}{t_1} = 0$. Вектор-функция (3), и ее производная первого порядка являются непрерывными при всех t. Ее производная второго порядка не определена в нескольких точках, включая псевдовершину t_0. Граница $\Gamma = \partial M$ целевого множества, биссектриса L и линии уровня функции оптимального результата $u(x, y)$ с шагом 0.4 показаны на рис. 1.

5. Заключение

Развиваемые методы и подходы доведены до вычислительных алгоритмов и с их помощью осуществлено аналитико-численное моделирование решений для конкретных примеров задач управления по быстродействию с визуализацией полученных результатов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-00424, https://rscf.ru/project/24-21-00424.

Список литературы

1. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004.
2. Ефимов Н.В., Стечкин С.Б. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.
3. Иванов Г.А. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.
4. Успенский А.А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия // Труды Института математики и механики. 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
5. Успенский А.А. Производные в силу диффеоморфизмов и их приложения в теории управления и геометрической оптике // Труды Института математики и механики. 2015. Т. 21, № 2. С.252–266.
6. Ушаков В.Н., Успенский А.А. Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 1. С. 95–120.
7. Ушаков В.Н., Ершов А.А., Матвийчук А.Р. Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // Труды МИАН. 2021 Т. 315. С. 261–270.
8. Lebedev P.D., Uspenskii A.A. On the structure of the singularity of the solution to the time-optimal control problem in the case of a discontinuity in the curvature of the boundary of the target set// IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56, No. 2. P. 7486–7491.
9. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.
10. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // В сборнике: Прикладная математика и информатика. Труды факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Москва, 2007. С. 65–79.
11. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О структуре сингулярности минимаксного решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала при нарушении гладкости кривизны границы краевого множества// Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 3. С.129–154.
12. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84.
13. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.