УДК 517.977.1

ВНЕШНЯЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.В. Симкина

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4

E-mail: abv1998@yandex.ru

Ключевые слова: линейная дискретная система, выпуклый компакт, многогранник, множества управляемости, предельное множество достижимости, принцип сжимающих отображений.

Аннотация: В работе рассматривается вопрос построения оценок предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем с выпуклыми ограничениями на управление. Сформулирован метод декомпозиции, позволяющий свести задачу для исходной линейной дискретной системы к подсистемам меньшей размерности посредством перехода в вещественный жорданов базис матрицы системы. Структура предельного множества достижимости зависит от жордановой формы и собственных векторов матрицы системы. На основе принципа сжимающих отображений предложен метод построения внешней оценки предельного множества достижимости с произвольным порядком точности в смысле расстояния Хаусдорфа. Сформулированы условия, при которых отображение является сжимающим. Доказано, что предельная точка сжимающего отображения с точностью до замыкания должна совпадать с предельным множеством достижимости линейной дискретной системы с ограниченным управлением.

1. Введение

При исследовании математических моделей различных динамических систем одним из наиболее важных свойств является достижимость. В большинстве исследуемых объектов управляющие воздействия являются ограниченными по своим возможностям: реактивные двигатели летательного аппарата имеют ограниченную тягу и конечный запас топлива, сервоприводы различных роботизированных систем также способны развивать некоторое фиксированное усилие. Данные ограничения приводят к тому, что управляемый объект может быть выведен на желаемый режим работы, вообще говоря, не из всех начальных состояний. В связи с этим оказывается актуальной задача анализа каждого отдельно взятого начального состояния на свойство достижимости.

На текущий момент сильное развитие получают математические модели с дискретным временем, что обусловлено цифровым подходом к реализации программ управления [3]. Так для дискретных систем управления известен подход, направленный на построение предельных множеств управляемости и достижимости. Однако зачастую даже в линейном случае удается только сформулировать достаточные условия того, что данные множества будут ограниченными. При этом даются только самые общие оценки их структуры: в [1] продемонстрировано, что предельные множества управляемости и достижимости линейных систем представляют собой цилиндр с некоторым выпуклым сечением. В [2] также в случае определенной структуры матрицы линейной системы на основе принципа максимума предложен метод оценивания предельного множества достижимости. Данная работа позволяет расширить полученные ранее результаты на класс систем произвольной размерности, также предлагает новый метод построения оценки предельного множества достижимости на основе принципа сжимающих отображений.

2. Постановка задачи

Рассматривается n-мерная линейная автономная дискретная система управления $(A,\mathcal{U})$ с ограниченным управлением:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k),\\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где $x(k), u(k) \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния и управления соответственно, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество допустимых значений управления, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица системы. Предполагается, что $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$.

Обозначим через $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ семейство множеств достижимости, где каждое $\mathcal{Y}(N)$ представляет собой множество тех состояний, в которые посредством выбора допустимого управления систему (1) можно перевести из начала координат за N шагов:

$$(2)\qquad \mathcal{Y}(N) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(0) = 0, x(N) = x\}, & N \in \mathbb{N},\\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Требуется построить предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_\infty$, т.е. множество тех состояний, в которые систему $(A,\mathcal{U})$ можно перевести из начала координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{Y}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists N \in \mathbb{N},\ \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(N) = x, x(0) = 0\}.$$

С учетом (2) также справедливо представление

$$(3)\qquad \mathcal{Y}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N).$$

3. Внешняя оценка на основе принципа сжимающих отображений

Рассмотрим случай, когда предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_\infty$ системы $(A,\mathcal{U})$ ограниченно, что эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы A

по модулю строго меньше 1. Справедлива следующая лемма, определяющая структуру множеств достижимости системы $(A,\mathcal{U})$.

Лемма 1. *[3, лемма 1] Для всех $N \in \mathbb{N}$ множество достижимости* (2) *системы* $(A,\mathcal{U})$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\mathcal{Y}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} A^k\mathcal{U},$$

$$\mathcal{Y}(N) = A\mathcal{Y}(N-1) + \mathcal{U}.$$

Обозначим через $\mathbb{K}_n$ множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$, а через ρ_H – расстояние Хаусдорфа:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \colon \mathcal{X} \text{ – компакт}\},$$

$$\rho_H(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \max\left\{\sup_{x\in\mathcal{X}}\inf_{y\in\mathcal{Y}}\|x-y\|_p; \sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}\|x-y\|_p\right\}.$$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}$$

Если учесть, что $\mathcal{U}$ – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, то каждое множество вида (2) также является выпуклым компактом, т.к. представимо в виде алгебраической суммы линейных преобразований компактов. Тогда в метрическом пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ можно определить отображение $T\colon \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$T(\mathcal{Y}) = A\mathcal{Y} + \mathcal{U}. \tag{4}$$

С учетом леммы 1 и соотношения (4), если отображение T либо $\underbrace{T\circ\ldots\circ T}_{M}$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств достижимости (2) в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$, может быть определен посредством принципа сжимающих отображений. Также принцип сжимающих отображений позволяет оценить погрешность приближения предельной точки при помощи метода простой итерации. С другой стороны, предельная точка с точностью до замыкания в силу (3) должна совпадать с $\mathcal{Y}_\infty$. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1, семейство $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношением* (2), *множество $\mathcal{Y}_\infty$ определяется соотношением* (3), *отображение T имеет вид* (4).

Тогда

1. *существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T_M = \underbrace{T\circ\ldots\circ T}_{M}$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0;1)$;*
2. *$\overline{\mathcal{Y}_\infty}$ – единственная неподвижная точка отображения T в пространстве $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$;*
3. *справедлива оценка*

$$\rho_H(\overline{\mathcal{Y}_\infty}, \mathcal{Y}(NM)) \leqslant \frac{\alpha^N}{1-\alpha}\rho_H(\mathcal{Y}(M), \{0\}).$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство следует из [4, теорема 2] при замене A^{-1} на A и $(-A^{-1}\mathcal{U})$ на $\mathcal{U}$.

Значение коэффицента сжатия α из теоремы 1 вообще говоря зависит от выбора нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ и, как следствие, от ассоциированной с ней операторной нормы матрицы A. Например, известны следующие оценки величины α при выборе различных норм $\|\dot{}\|_p$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,\ \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2};\ \alpha_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \tag{5}$$

Методы, позволяющие в общем случае определить, при каком значении $M \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ отображение T_M окажется сжимающим, на данный момент неизвестны. Однако с учетом оценок (5) величина M может быть определена численно посредством последовательного вычисления α для различных значений $M \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Также выбор нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ влияет на значение расстояния Хаусдорфа в $\mathbb{K}_n$, что в конечном счете определяет структуру внешних оценок множества $\mathcal{Y}_\infty$.

Теорема 2. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ по модулю строго меньше 1, семейство $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (2), множество $\mathcal{Y}_\infty$ определяется соотношением (3), величина $M \in \mathbb{N}$ выбрана так, чтобы T_M являлось сжимающим отображением с коэффициентами сжатия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty \in [0;1)$, которые ассоциированы с нормами $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ соответственно. Тогда*

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \mathrm{conv}\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{i}, r, 0,\ldots,0)^T \colon r \in \{-R_1, R_1\},\ i=\overline{0,n-1}\},$$

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \leqslant R_2\right\},$$

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \{x \in \mathbb{R}^n \colon \max_{i=\overline{1,n}}|x_i| \leqslant R_\infty\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1-\alpha_p}\max_{x\in\mathcal{Y}(M)}\|x\|_p,\ p\in\{1,2,\infty\},\ N\in\mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 2. В силу пункта 3 теоремы 1

$$\rho_H\big(\overline{\mathcal{Y}_\infty}, \mathcal{Y}(NM)\big) \leqslant \frac{\alpha_p^N}{1-\alpha_p^N}\rho_H(\mathcal{Y}(M),\{0\}) = R_p,\ p\in\{1,2,\infty\}.$$

Тогда в силу определения расстояния Хаусдорфа

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \overline{\mathcal{Y}_\infty} \subset \mathcal{Y}(NM) + B_{R_p}(0),$$

где

$$B_{R_1}(0) = \mathrm{conv}\left\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{i}, r, 0,\ldots,0)^T \colon r\in\{-R_1,R_1\},\ i=\overline{0,n-1}\right\},$$

$$B_{R_2}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leqslant R_2 \right\},$$

$$B_{R_\infty}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \leqslant R_\infty \right\}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 позволяет построить внешние оценки множества $\mathcal{Y}_\infty$ с любой наперед заданной точностью.

4. Заключение

В работе рассмотрена задача численного моделирования предельных множеств достижимости линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Множество допустимых значений управлений предполагается выпуклым компактом, содержащим начало координат. Доказано, что структура предельного множества достижимости зависит от жордановой формы и собственных значений матрицы системы. Для случая ограниченного предельного множества достижимости разработан метод построения его внешней оценки на основе принципа сжимающих отображений с любой наперед заданной точностью в форме многогранника, что позволяет реализовать процесс моделирования численно.

Список литературы

1. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 17–32.
2. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. Vol. 56, No. 1. P. 67–88.
3. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // Автоматика и телемеханика. 2019. № 3. С. 3–25.
4. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Автоматика и телемеханика. 2023. № 2. С. 3–34.