УДК 519.711.3, 519.852, 681.5.015

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ЛЮДЕЙ

**М.В. Зайцева**
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: zaimarko@gmail.com

**П.А. Точилин**
*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52
E-mail: tochilin@cs.msu.ru

**Ключевые слова:** моделирование потоков людей, линейное программирование, множество достижимости, гарантированные оценки, идентификация параметров.

**Аннотация:** Работа посвящена математическому моделированию потоков людей в помещении. За основу взята модификация дискретной макромодели CTM. Рассматривается подзадача идентификации коэффициентов расщепления по известным входящим и исходящим потокам из помещения. Коэффициенты расщепления характеризуют распределение потоков по переходам в соседние комнаты из текущей. Предложен алгоритм их идентификации за счет прямого и обратного по времени уточнения интервальных оценок множества достижимости – количеств людей в каждой комнате, а также значений потоков на переходах внутри помещения в рассматриваемые моменты времени.

## 1. Введение

В математическом моделировании движения групп людей выделяют два основных подхода: микроскопический, когда учитывается скорость и положение каждого человека, и макроскопический, когда используется усредненная характеристика – плотность – количество людей на единицу площади. Макроскопический подход для задач моделирования транспортных потоков, основанный на законе сохранения, применяется в модели LWR (Lighthill, Whitham, Richards) [1]. В работах [2, 3] предложен ее дискретный аналог – макромодель CTM (Cell Transmission Model). Рассматриваемая в текущей работе модель является ее аналогом для задачи моделирования потоков людей в помещении. Ее подробное описание и возможный метод калибровки коэффициентов фундаментальной диаграммы [4] были предложены ранее в работе [5].

В данной работе исследования посвящены задаче идентификации коэффициентов расщепления, то есть коэффициентов, характеризующих соотношение долей, в которых распределяются люди по соседним комнатам в случае, когда имеется несколько переходов из текущей комнаты. В исходной модели эти коэффициенты считаются априори известными, например, по данным с камер видеонаблюдения, однако не везде такая информация может быть доступна. Кроме того, исходная модель предполагает зависимость коэффициентов расщепления от времени – спрос на тот или иной переход может меняться в разные промежутки времени, то есть модель должна корректно адаптироваться к изменению этих параметров.

Пусть в начальный момент времени доступна информация о распределении людей в каждой комнате с некоторой погрешностью. Информация о входящих и исходящих потоках из помещения также с некоторой погрешностью считается известной в каждый момент времени. Требуется восстановить значения коэффициентов расщепления для каждой комнаты помещения.

## 2. Математическая модель

Предположим, что для помещения (например, станции метро, крупного торгового центра, стадиона и т.п.) построена математическая модель в виде ориентированного графа, вершины которого сопоставлены отдельным «комнатам» (частям помещения), а ребра – переходам между ними.

Общее количество рассматриваемых комнат в помещении равно $N$, и они занумерованы индексами $i = 1, \dots, N$. Выделим специальное значение индекса $i = 0$ для «внешности» рассматриваемой системы комнат, откуда приходят, и куда в итоге попадают все люди из рассматриваемых комнат через некоторое время. Пусть $T_{ij}$ – ребро, соединяющее комнаты с номерами $i$ и $j$, а $\mathcal{T}$ – множество всех таких ребер.

Каждой комнате $i$ сопоставлены следующие характеристики: $S_i$ – площадь, $C_i$ – максимальная вместимость, $n_i(t)$ – количество людей в момент времени $t$. Для комнаты $i$, связанной переходами с комнатами $j_1, \dots j_k$ дополнительно вводится: $\alpha^{(i)}(t) = (\alpha^{(i)}_{j_1}(t), \dots, \alpha^{(i)}_{j_k}(t))$ – набор *коэффициентов расщепления*, где $k$ – количество соседних комнат, в которые можно перейти из $i$-ой. При этом $\alpha^{(i)}_s(t) \in [0, 1]$, $s = j_1, \dots, j_k$, $\sum\limits_{s=j_1}^{j_k} \alpha^{(i)}_s(t) = 1$, $\forall t$.

Каждому переходу $T_{ij}$ сопоставлена тройка $(v_{ij}, F_{ij}, w_{ij})$, где $v_{ij}$, $F_{ij}$, $w_{ij}$ – коэффициенты, подобные коэффициентам *фундаментальной диаграммы* [1], определяющие зависимость потока людей $f_{ij}(t)$ от плотности $\rho_{ij}(t)$: $f_{ij}(t) = f_{ij}(\rho_{ij}(t))$. $v_{ij}$ характеризует скорость свободного движения, $w_{ij}$ – скорость распространения затора, $F_{ij}$ – максимальную пропускную способность перехода между комнатами.

Рассмотрим моменты времени $t = t_0, t_0 + \Delta t, \dots$ и уравнения для пересчета количеств людей $n_i(t)$ в комнатах:

$$n_i(t + \Delta t) = n_i(t) + \Delta t \left( \sum_{T_{ji} \in \mathcal{T}} f_{ji}(t) - \sum_{T_{ij} \in \mathcal{T}} f_{ij}(t) \right), \quad i = 1, \dots, N, \tag{1}$$

где $f_{ij}(t)$ – поток людей на соединении $T_{ij}$ в момент времени $t$. Шаг по времени $\Delta t > 0$ фиксирован. Величины потоков $f_{ij}(t)$ для каждого момента времени $t$ являются решением задачи линейного программирования:

$$\sum_{T_{ij}\in\mathcal{T}} f_{ij}(t) \to \max_{\{f_{ij}\}}, \tag{2}$$

$$0 \leqslant f_{ij}(t) \leqslant F_{ij} - f_{ji}(t), \qquad \forall i,j : T_{ij} \in \mathcal{T}, \tag{3}$$

$$f_{ij}(t) \leqslant \alpha_j^{(i)}(t) v_{ij} \frac{n_i(t)}{S_i}, \qquad \forall i,j : T_{ij} \in \mathcal{T}, \tag{4}$$

$$\sum_{T_{ij}\in\mathcal{T}} \frac{f_{ij}(t)}{w_{ij}} \leqslant \left(\frac{C_j - n_j(t)}{S_j}\right), \qquad \forall j. \tag{5}$$

Неравенство (3) характеризует влияние противонаправленных потоков $f_{ij}$ и $f_{ji}$ друг на друга. Неравенство (4) определяет долю от общего количества людей в комнате с номером $i$, желающих перейти из комнаты $i$ в комнату $j$. Соотношение (5) является ограничением на суммарный входящий поток в $j$-ю комнату. Максимизация потоков (2) соответствует тому принципу, что люди всегда будут занимать с максимальной возможной скоростью все доступное им свободное место, если это соответствует желаемому направлению их движения.

## 3. Исходные данные и постановка задачи

Для уточнения количеств людей в каждой комнате в момент времени $t$ как и в работе [6] будем использовать интервальные оценки *множества достижимости* [7]:

$$\mathcal{X}(t) = \{[n_{i,-}(t), n_{i,+}(t)],\ i = 1,\ldots,N\}.$$

Предположим, что в начальный момент времени $t_0$ известна достаточно точная оценка количеств людей в каждой комнате $|n_{i,+}(t_0) - n_{i,-}(t_0)| < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n$ – является константой, определяющей погрешность измерения. Такую оценку можно получать, например, после обработки изображений с видеокамер.

Кроме того, в каждый момент времени $t$ известны оценки на входящие $f_{0j}(t)$ и исходящие $f_{i0}(t)$ «внешние» потоки, то есть

$$f_{0j}(t) \in [f_{0j,-}(t), f_{0j,+}(t)], \quad f_{i0}(t) \in [f_{i0,-}(t), f_{i0,+}(t)].$$

Требуется восстановить коэффициенты расщепления

$$\alpha^{(i)}(t) = (\alpha_{j_1}^{(i)}(t), ..., \alpha_{j_{k_i}}^{(i)}(t)) :\ \alpha_j^{(i)}(t) \in [0,1],\ \forall j,\ \sum_{k=1}^{k_i} \alpha_{j_k}^{(i)}(t) = 1,$$

характеризующие для каждой комнаты с номером $i$ долю желающих перейти в соседнюю комнату с номером $j$.

## 4. Общая схема алгоритма идентификации

Фиксируем максимальное количество итераций по времени $T_{\max}$ и максимальное количество итераций $S_{\max}$, обновляющих коэффициенты расщепления $\alpha_j^{(i)}(t,s)$. Считаем, что на рассматриваемом горизонте времени коэффициенты являются константами, поэтому зависимость от времени далее опустим. Будем хранить и постепенно уточнять оценки множества достижимости $\mathcal{X}(t)$ в каждый момент времени $t = t_0, \ldots, T_{\max}$, а также множества возможных потоков $\mathcal{F}_{ij}(t)$, $t = t_0, \ldots, T_{\max} - 1$.

1. Положим в начальный момент времени $t_0$ для комнат $i$ с несколькими выходящими переходами $T_{ij}$, где $j = j_1, \ldots j_{k_i}$: $\alpha^{(i)}_{j,-}(s) = 0, \quad \alpha^{(i)}_{j,+}(s) = 1$. Для комнат $i$ с одним выходящим переходом $T_{ij}$ можем сразу определить значения коэффициентов расщепления $\alpha^{(i)}_{j,-} = \alpha^{(i)}_{j,+} = 1$.
   Номер итерации по коэффициентам расщепления: $s = 0$.

2. Определим множества возможных потоков $\mathcal{F}_{ij}(t + \Delta t)$, $t = t_0, \ldots, T_{\max} - 1$, и внешних интервальных оценок множества достижимости $\mathcal{X}(t + \Delta t)$ для $t = t_0, \ldots, T_{\max}$, в соответствии с модификацией алгоритма, представленного в работе [6]. Здесь модификация связана с тем, что точные значения $\alpha^{(i)}_j$ неизвестны, вместо них используется оценка $[\alpha^{(i)}_{j,-}(s), \alpha^{(i)}_{j,+}(s)]$.

3. Попутно с построением интервальных оценок $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{F}_{ij}(t)$ будем уточнять их значения там, где это возможно за счет доступной информации о входящих и исходящих потоков.

   (a) В случае единственного выходящего потока из $i$ и единственного входящего в комнату $j$. Проверим, какое из ограничений в задаче линейного программирования (2)-(5) определило значение максимального потока $f_{ij,+}(t)$. Если выполнено

   $$f_{ij,+}(t) < \min\left\{F_{ij}, w_{ij}\left(\frac{C_j - n_{j,-}(t)}{S_j}\right)\right\}, \tag{6}$$

   можно уточнить значения в комнате $i$:

   $$n_{i,-}(t) = \max\left\{\tilde{n}_{i,-}(t), \frac{f_{ij,-}S_i}{v_{ij}}\right\}, \quad n_{i,+}(t) = \min\left\{\tilde{n}_{i,+}(t), \frac{f_{ij,+}S_i}{v_{ij}}\right\},$$

   где $\tilde{n}_{i,-}(t)$ и $\tilde{n}_{i,+}(t)$ – оценки, полученные ранее.

   (b) В случае, если в комнату $i$ направлен единственный входящий поток $f_{ki}$, можно уточнить оценку на него:

   $$f_{ki,-}(t) = \frac{1}{\Delta t}\left(n_{i,-}(t + \Delta t) - n_{i,+}(t)\right) + \sum_{T_{ij}} f_{ij,+},$$
   $$f_{ki,+}(t) = \frac{1}{\Delta t}\left(n_{i,+}(t + \Delta t) - n_{i,-}(t)\right) + \sum_{T_{ij}} f_{ij,-}.$$

   Если коэффициенты $\alpha^{(k)}_{i,-}(s)$ и $\alpha^{(k)}_{i,+}(s)$ требуют уточнения и выполнено ограничение (6), то можем сразу обновить их значения:

   $$\alpha^{(k)}_{i,-}(s+1) = \max\left\{\alpha^{(k)}_{i,-}(s), \frac{f_{ki,-}(t)S_k}{n_{k,+}(t)v_{ki}}\right\}, \quad n_{k,+}(t) \neq 0,$$
   $$\alpha^{(k)}_{i,+}(s+1) = \min\left\{\alpha^{(k)}_{i,+}(s), \frac{f_{ki,+}(t)S_k}{n_{k,-}(t)v_{ki}}\right\}, \quad n_{k,-}(t) \neq 0.$$

4. Аналогично пересчету количеств людей в каждой комнате (1) произведем уточнение оценок $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{F}_{ij}(t)$ в обратном времени.

5. Уточним нижние оценки коэффициентов расщепления для каждого перехода $T_{ij}$, $n_{i,+}(t) \neq 0$:

$$\alpha_{j,-}^{(i)}(s+1) = \max\left\{\alpha_{j,-}^{(i)}(s), \frac{f_{ij,-}(t)S_i}{n_{i,+}(t)v_{ij}}\right\}, \quad t = t_0, \ldots, (T_{\max}-1).$$

   А затем верхние оценки:

$$\alpha_{j^*,+}^{(i)}(s+1) = \min\left\{\alpha_{j^*,+}^{(i)}(s), 1 - \sum_{j\neq j^*}\alpha_{j,-}^{(i)}(s+1)\right\}, \quad t = t_0, \ldots, (T_{\max}-1).$$

6. Если на текущей, $s$-ой итерации работы алгоритма не произошло улучшение оценок $\mathcal{X}(t)$, $\mathcal{F}_{ij}(t)$ для каких-либо $t, i, j$ или оценок на $\alpha_j^{(i)}$ и при этом $s < S_{\max}$, то алгоритм снова переходит к пункту 2. При этом в новом построении оценок учитываются все полученные ранее уточнения. В противном случае алгоритм завершает работу.

## 5. Заключение

Представленный в работе [6] алгоритм построения множеств достижимости для модели движения групп людей позволяет также находить оценки на коэффициенты расщепления. Построение таких оценок дает возможность получать наиболее реалистичную модель передвижения людей в помещении, которая была бы полезна в дальнейшей работе, а также в выборе наиболее подходящей стратегии управления при распределении людей, не допускающей возникновения толпы и давки.

Описанный в данной работе алгоритм вычисления оценок коэффициентов расщепления был реализован в форме компьютерной программы. Были выполнены расчеты для конкретных примеров, а также выведены достаточные условия, когда коэффициенты расщепления удается определить точно.

## Список литературы


1. Piccoli B., Garavello M. Traffic flow on networks. American institute of mathematical sciences, 2006. 243 P.
2. Daganzo C. F. The cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory // Transp. Res.-B. 1994. Vol. 28B, No. 4. P. 269–287.
3. Daganzo C.F. The cell transmission model, part II: network traffic // Transp. Res.-B. 1995. Vol. 29B. No. 2. P. 79–93.
4. Куржанский А. Б., Куржанский А. А., Варайя П. Роль макромоделирования в активном управлении транспортной сетью // Труды МФТИ. 2010. Т. 2,№ 4. С. 100–118.
5. Зайцева М.В., Точилин П.А. Управление потоками людей в здании во время эвакуации // Вестник Московского университета. Серия 15. 2020. № 4. С. 3–17.
6. Зайцева М.В., Точилин П.А. Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 7. С. 164–177.
7. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes. Birkhäuser, 2014. 445 P.