УДК 519.711

СОВМЕСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ И СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (ЧАСТЬ 2: ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛС МОДЕЛЬ)

О.Ю. Копысов
Декартов Научен Център
Болгария, 9002, гр. Варна, ж.к. Чайка, бл.185, ап.13
E-mail: iainstitute@inbox.ru

Ключевые слова: модели линейной структуры (ЛСМодели), пространство параметров и реализаций ЛСМоделей, сингулярное разложение (SVD), вспомогательная ЛСМодель, динамические нелинейные системы.

Аннотация: Для некоторого класса нелинейных систем, названных моделями линейной структуры (ЛСМоделями), предлагается аналитический метод перехода к линейной вспомогательной модели, в которой вектор параметров расширяется начальными состояниями, и новая задача идентификации параметров и начальных состояний становится линейной.

1. Введение

Рассмотрим идею вспомогательной модели на простом примере. Пусть исходная модель имеет вид:

$$\alpha_1\dot{x}(t)+\alpha_2 x(t)+\alpha_3 w(t)=0.$$

Проинтегрировав уравнение исходной модели, получим вспомогательную модель:

$$\alpha_1 x(t)-\alpha_1 x(t_0)+\alpha_2\int_{t_0}^{t}x(\tau)\,d\tau+\alpha_3\int_{t_0}^{t}w(\tau)\,d\tau=0,$$

Таким образом, мы получили еще один параметр $-\alpha_1 x(t_0)$, который содержит начальные условия, а задача остается линейной. Правда, из этой вспомогательной модели мы не сможем получить оценку $\dot{x}(t)$, но есть еще и исходная модель.

Исправлению недостатков и обобщению этой простой идеи и посвящается этот доклад.

2. Вспомогательная модель с невязкой

Рассмотрим класс моделей линейной структуры (ЛСМоделей) с невязкой вида:

(1) $$\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S}\alpha_{ks}\,f_k^{(S-s)}(t,y,w)=\varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ — невязка; α_{ks} – параметры модели; $f_k^{(S-s)}(t,y,w)=\frac{d^{S-s}}{dt^{S-s}}f_k(t,y,w)$ — соответствующие производные от элементов модели $f_k(t,y,w)$, зависящих от $w(t)$ – измеряемого входа объекта, $y(t)$ — измеряемого выхода объекта и независимой переменной t.

Следуя [1,2] введем вспомогательный вектор состояния $\boldsymbol{z}(t)$ с компонентами вида:

$$z_1(t) = e(t),$$
$$z_2(t) = z_1^{(1)}(t) - c_1 z_1(t) - \sum_{k=1}^{K} a_{k1} f_k(t, y, w),$$
(2) $$\vdots$$
$$z_S(t) = z_{S-1}^{(1)}(t) - c_{S-1} z_1(t) - \sum_{k=1}^{K} a_{k,S-1} f_k(t, y, w).$$

Тогда $\boldsymbol{z}(t)$ будет удовлетворять уравнению вспомогательной модели вида:

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{z}(t) + \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{a}_k f_k(t, y, w),$$

где $\boldsymbol{z}(t)=\big(z_1(t), \dots, z_S(t)\big)'$ – вспомогательный вектор-столбец; $\boldsymbol{a}_k= (a_{k1}, \dots, a_{kS})'$ – вектор-столбец параметров при функции $f_k(t, y, w)$ и ее производных; C – матрица с произвольными коэффициентами c_s (s=1, … , S) вида: $C=\begin{bmatrix} c_1 & 1\ 0 & \dots 0 \\ c_2 & 0\ 1 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ c_{S-1} & 0\ 0 & \dots 1 \\ c_S & 0\ 0 & \dots 0 \end{bmatrix}$;

при этом невязка $e(t)$ будет удовлетворять уравнению:

(4) $$e^{(S)}(t) - \sum_{s=1}^{S} c_s e^{(S-s)}(t) = \varepsilon(t).$$

Запишем решение задачи Коши для линейной стационарной вспомогательной модели (3) с начальными условиями $\boldsymbol{z}(0)=(z_{10}, \dots, z_{S0})'$ в виде:

(5) $$\boldsymbol{z}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{z}(0) + \sum_{k=1}^{K} R_k(t)\boldsymbol{a}_k\,,$$

где матрицы $\Phi(t)$ и $R_k(t)$ являются решениями следующих задач Коши:

(6) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = C\Phi(t), \quad \Phi(0) = E;$$

(7) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_k(t) = CR_k(t) + f_k(t, y, w)E, \quad R_k(0) = 0;$$

здесь E – единичная матрица. Все матрицы имеют размер $S{\times}S$.

Вспомним, что $z_1(t)$=$e(t)$, тогда первая строка решения $\boldsymbol{z}(t)$ (5) примет вид:

(8) $$\sum_{s=1}^{S} z_{s0}\phi_{1s}(t) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S} \alpha_{ks}\, r_{k,1s}(t) = e(t),$$

здесь $\phi_{1s}(t), r_{k,1s}(t)$ – элементы первых строк матриц $\Phi(t)$, $R_k(t)$ соответственно.

Таким образом, мы получили вспомогательную ЛСМодель с невязкой, задача идентификации по которой является линейной. Замечу также, что полученная вспомогательная модель не зависит от измеряемых и/или вычисляемых функций $f_k(t, y, w)$, а состоит из $r_{k,1s}(t)$ – решений задач Коши для матричных линейных уравнений, результатов преобразования этих функций. Можно сказать результатов фильтрации функций $f_k(t, y, w)$ и ее производных. Например, уравнение для элемента первой строки -того столбца матрицы $R_k(t)$:

(9) $$r_{k,1s}^{(S)}(t) - c_1 r_{k,1s}^{(S-1)}(t) - \dots - c_{S-1} r_{k,1s}^{(1)}(t) - c_S r_{k,1s}(t) = f_k^{(S-s)}(t)$$

есть уравнение линейного фильтра элемента исходной модели $f_k^{(S-s)}(t)$, причем фильтр можно изменять, выбирая порядок S и коэффициенты c_s. Это позволяет строить итерационные алгоритмы, шаг за шагом избавляясь от шумов.

Для нас важно, что все решения задачи идентификации параметров, полученные по вспомогательной модели, являются решениями исходной задачи и наоборот. Доказательство и аналитический пример смотри в [3].

Рассмотрим в качестве примера ЛСМодель из первой части доклада вида:

$$a_{11}\dot{x}(t) + a_{12}x(t) + a_{22}x^3(t) + a_{32}1(t) = \varepsilon(t),$$

тогда S=2, K=3, $f_1(t)$=$x(t)$, $f_2(t)$=$x^3(t)$, $f_3(t)$=$1(t)$ и вспомогательный вектор состояния $\boldsymbol{z}(t)$ имеет вид:

$$z_1(t) = e(t),$$
$$z_2(t) = z_1^{(1)}(t) - c_1 z_1(t) - a_{11}x(t).$$

Вспомогательная модель (3) имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22} \end{bmatrix} x^3(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{32} \end{bmatrix} 1(t),$$

решение (5) задачи Коши для нее с начальными условиями $\boldsymbol{z}(0)=(z_{10}, z_{20})'$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{1,11} & r_{1,12} \\ r_{1,21} & r_{1,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{2,11} & r_{2,12} \\ r_{2,21} & r_{2,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ a_{22} \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} r_{3,11} & r_{3,12} \\ r_{3,21} & r_{3,22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ a_{32} \end{bmatrix}.$$

Задачи Коши (6) и (7) имеют вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \phi_{11}(0) & \phi_{12}(0) \\ \phi_{21}(0) & \phi_{22}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} r_{1,11} & r_{1,12} \\ r_{1,21} & r_{1,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{1,11} & r_{1,21} \\ r_{1,21} & r_{1,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x(t) & 0 \\ 0 & x(t) \end{bmatrix}, \quad R_1(0) = 0;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} r_{2,11} & r_{2,12} \\ r_{2,21} & r_{2,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{2,11} & r_{2,12} \\ r_{2,21} & r_{2,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^3(t) & 0 \\ 0 & x^3(t) \end{bmatrix}, \; R_2(0) = 0;$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} r_{3,11} & r_{3,12} \\ r_{3,21} & r_{3,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{3,11} & r_{3,12} \\ r_{3,21} & r_{3,22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1(t) & 0 \\ 0 & 1(t) \end{bmatrix}, \quad R_3(0) = 0.$$

Вспомогательная модель с невязкой (8) имеет вид:

$$z_{10}\phi_{11}(t)+z_{20}\phi_{12}(t)+a_{11}r_{1,11}(t)+a_{12}r_{1,12}(t)+a_{22}r_{2,12}(t)+a_{32}r_{3,12}(t)= e(t).$$

Из изложенного следует следующий метод идентификации параметров не требующий вычисления производных:

1) по измерениям элементов объекта вычисляются $f_k(t, y, w)$ и решаются задачи Коши для матриц $\Phi(t)$ и $R_k(t)$;
2) решается эквивалентная задача идентификации посредством вспомогательной модели с невязкой (8), то есть вычисляются z_{s0} и a_{ks};
3) подстановкой вычисленных параметров $\hat{a}_{ks}$ и начальных условий $\hat{z}_{s0}$ в уравнение (5) вычисляется $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$, а из (3) $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$ в том числе и $\hat{e}(t)$=$\hat{z}_1(t)$; затем из (2) вычисляются оценки элементов исходной модели $\hat{f}_k(t, y, w)$;

и если это необходимо, весь процесс вычислений повторяется с новыми $\hat{f}_k(t, y, w)$.

Подробно итерационный алгоритм и программу на языке МАТЛАБ смотри в [4].

3. Оценка параметров и состояния

В первой части доклада мы решали вопросы совместной оценки параметров и состояния с помощью сингулярного разложения. Однако изложенный в первой части доклада метод имеет очень важный для нас недостаток. Если некоторые элементы модели известны абсолютно точно, то оптимальная модельная плоскость не проходит через эти элементы, другими словами, оптимальная оценка точных элементов искажает их. Рассмотрим подробнее матрицу F_i= $\boldsymbol{u}_i s_i \boldsymbol{v}_i'$, тогда ее j-ый столбец $\boldsymbol{f}_{i,j}$= $\boldsymbol{u}_i s_i v_{ij}$ и если s_i≠0 и v_{ij}≠0, то при поиске оптимальной оценки, отбрасывая элемент F_i сингулярного разложения матрицы F, мы искажаем ее j-ый столбец. Поэтому для точных элементов и искаженных шумом будем применять разные стратегии.

Кстати замечу, что очень полезно анализировать ΔF=$\sum_{i=r+1}^{n} F_i$ – это то, что мы отбрасываем из измеренных и вычисленных элементов при переходе к оптимальной модели. Из вышесказанного следует, что показателем вклада j-той реализации в ΔF является $|u_{ij}|$. Например, для борьбы с аномальными измерениями можно убрать из матрицы F несколько j-ых реализаций с наибольшими значениями $|u_{ij}|$ и заново вычислить сингулярное разложение.

3.1. Метод смешанных наименьших и тотальных наименьших квадратов

Следуя стратегии метода смешанных наименьших и тотальных наименьших квадратов (mixed LS-TLS) [5] запишем уравнение вспомогательной модели (8) в виде:

(10) $\bar{F}\boldsymbol{\beta} + \tilde{F}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ или $[\bar{F}|\tilde{F}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$,

здесь в $\bar{F}$ собраны все элементы вспомогательной ЛСМодели известные точно, а в $\tilde{F}$– неточно.

В примере $\Phi(t)$ и $R_3(t)$ известны точно, а $R_1(t)$ и $R_2(t)$ – неточно, тогда:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_1) & \phi_{12}(t_1) & r_{3,12}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{11}(t_m) & \phi_{12}(t_m) & r_{3,12}(t_m) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} r_{1,11}(t_1) & r_{1,12}(t_1) & r_{2,12}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1,11}(t_m) & r_{1,12}(t_m) & r_{2,12}(t_m) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

При числе строк больше чем число столбцов QR-разложение матрицы $\bar{F}$ будет иметь вид: $\bar{F}$=$Q\begin{bmatrix}T\\ O\end{bmatrix}$, здесь Q – ортогональная, T – неособая квадратная верхняя треугольная и O – нулевая матрицы. Умножим (10) на Q', тогда $Q'[\bar{F}|\tilde{F}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$= $Q'\mathbf{0}$

или (11) $\begin{bmatrix}T & P_1\\ O & P_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$=$\mathbf{0}$

и мы получили два уравнения:

1) $P_2\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (вторая строка) и 2) $T\boldsymbol{\beta} + P_1\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (первая строка).

Для первого мы будем искать оптимальные общее решение $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ и оценку $\hat{P}_2$ с помощью сингулярного разложения. Затем решение $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ подставлять во второе уравнение, которое имеет решение $\hat{\boldsymbol{\beta}}$=$-T^{-1}\,P_1\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. А оценку $\hat{P}_2$ подставим в (11) и умножим результат на матрицу Q, тогда $Q\begin{bmatrix}T & P_1\\ O & \hat{P}_2\end{bmatrix}$=$\left[\bar{F}\mid Q\begin{bmatrix}P_1\\ \hat{P}_2\end{bmatrix}\right]$. При этом оценка $\bar{F}$ осталась прежней, а оценка $\hat{\tilde{F}}$= $Q\begin{bmatrix}P_1\\ \hat{P}_2\end{bmatrix}$.

С геометрической точки зрения, получая уравнение (11) умножением исходного уравнения (10) на ортогональную матрицу Q, мы не изменяем взаимного расположения точек (реализаций) в ППР. При этом матрица $\tilde{F}$ разбивается на две матрицы: P_1 – проекций элементов модели искаженных шумом (столбцов матрица $\tilde{F}$) на оболочку точных элементов модели вошедших в $\bar{F}$; и P_2 – перпендикуляров к этой оболочке. Для перпендикуляров P_2 мы ищем оптимальную модельную плоскость, а для точных элементов остается точная модельная плоскость. Это очень важно для сходимости итерационного алгоритма.

3.2. Проецирование на плоскость фильтрованных гарантов

Представим каждый элемент ЛСМодели, как сумму точного элемента ЛСМодели и ошибки $f_k(t)$=$\bar{f}_k(t)$+$\Delta f_k(t)$, тогда $f_k^{(S-s)}(t)$=$\bar{f}_k^{(S-s)}(t)$+$\Delta f_k^{(S-s)}(t)$, а из (9) следует что $r_{k,1s}(t)$=$\bar{r}_{k,1s}$+$\Delta r_{k,1s}(t)$. Например, если $\Delta f_k(t)$ – высокочастотная помеха, то и $\Delta r_{k,1s}(t)$ – высокочастотная, так как уравнения для R_k линейные.

Добавим в управляющее воздействие низкочастотный гарантирующий идентификацию [2, 6] сигнал $u_g(t)$. Вычислим базис модельной плоскости фильтрованных гарантов и добавим базис фундаментальной матрицы $\Phi(t)$. Далее находим проекции элементов вспомогательной ЛСМодели на полученную составную плоскость и решаем задачу идентификации для уравнения проекций.

Базисы можно находить с помощь сингулярного разложения, а проекции с помощью QR-разложения.

Важно, что если сигнал $u_g(t)$ известен достаточно точно, то и базисы составной плоскости будут вычислены достаточно точно, поэтому амплитуда сигнала может быть очень маленькой. Главное условие это перпендикулярность плоскости фильтрованных гарантов и шума элементов модели, не очень маленького идентифицирующего сигнала $u_g(t)$, а составной плоскости и шума. Поэтому-то соотношение сигнал/шум и может быть огромным [6]. В примере взятый на периоде низкочастотный гарантирующий идентификацию сигнал $u_g(t)$ порождает «низкочастотную» плоскость гарантов перпендикулярную высокочастотному шуму.

Технически это один из самых быстрых методов идентификации. Он в итоге сводится к двум фильтрам: фильтру решения задач Коши (он может быть аналоговым) и цифровому фильтру проецирования на составную плоскость.

4. Заключение

Сам метод вспомогательной модели является аналитическим, однако его программная реализация имеет очень много вариантов, которые зависят от:

- метода фильтрации измерений (матрица C и порядок модели S);
- метода решения задач Коши;
- метода аппроксимации и частоты измерений, в том числе уровня селекции аномальных измерений;
- метода решения вспомогательной задачи идентификации параметров и начального состояния, в том числе выбора гарантирующего идентификацию сигнала.

Все это дает хорошие возможности подгонки программы под условия стоящей перед Вами проблемы.

Список литературы

1. Копысов О.Ю., Прокопов Б.И., Пупков К.А. Идентификация параметров и состояния одного класса нелинейных систем // Problems of Control and Information Theory. 1982. Vol. 11(3). P.205-216.
2. Копысов О.Ю. Идентификация посредством моделей линейной структуры. 2-ое издание. Декартов Научен Център, Варна, 2013. 425 с. ISBN 978-954-92807-4-6.
3. Копысов О.Ю. В поисках минимальной реализации нелинейной динамической системы (часть 1: метод) // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 601-605.
4. Копысов О.Ю. В поисках минимальной реализации нелинейной динамической системы (часть 2: алгоритм) // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 606-611.
5. Van Huffel S., Vandewalle J. The Total Least-Squares Problem: Computational Aspects and Analysis. Philadelphia/PA: SIAM, 1991. 300 p.
6. Копысов О.Ю. Идентификация посредством ЛС-Моделей с невязкой.// Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 2967-2978.