

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ В НАБЛЮДЕНИЯХ НЕИЗВЕСТНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ИЗ ЗАДАННОГО ЛИНЕЙНОГО МНОГООБРАЗИЯ

**А.А. Ломов**

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,*

*Новосибирский государственный университет*

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4

E-mail: lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

**Ключевые слова:** Линейные динамические системы, идентификация параметров, возмущения из заданного линейного многообразия, вариационный метод, задача Прони, обратные итерации.

**Аннотация:** Исследуется задача идентификации коэффициентов уравнения стационарного динамического процесса при наличии в наблюдениях неизвестных составляющих из заданного линейного многообразия (в частности, квазимногочленных или гармонических). Для вариационной целевой функции идентификации, оптимальной для коротких интервалов наблюдения, предложен алгоритм поиска минимума на основе обратных итераций. Получены условия идентифицируемости и сходимости алгоритма. Даны формулы оптимальной фильтрации возмущений и детерминированных составляющих. Приведены результаты расчетов.

## 1. Введение

В статье исследуется задача идентификации коэффициентов линейного динамического уравнения объекта по наблюдениям процессов со случайными аддитивными шумами и неизвестными детерминированными составляющими из заданного линейного многообразия  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^M$ . Многообразие  $\mathcal{S}$  может быть описано двояко: 1) набором базисных векторов (отсчетов функций на равномерной временной сетке) и 2) системой линейных уравнений. Второй случай широко представлен в литературе. Обычно используются разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Если уравнения однородные,  $\mathcal{S}$  состоит из квазимногочленов, в частности, из гармонических функций. При оценке частот гармонических составляющих уравнения объекта, как правило, предполагаются известными ([1, разделы 4, 6, 14], [2], [3, раздел 5]), применяются алгоритмы градиентные [3] или типа настраиваемой модели (адаптивного наблюдателя) [2]. Совместная идентификация параметров объекта и уравнения многообразия  $\mathcal{S}$

изучалась в [4].

В докладе рассматривается случай многообразий  $\mathcal{S}$ , представленных произвольным набором базисных векторов, в общем случае не являющихся квазимногочленами. Примерами являются ступенчатые, импульсные, кусочно-линейные по времени и т.п. функции. Показано, что при наличии в наблюдениях неизвестных составляющих из  $\mathcal{S}$  задача идентификации может быть сведена к минимизации вариационной целевой функции, для которой существует эффективное вычислительное решение на основе нелинейных обратных итераций [5–8]. Получены теоремы единственности, условия сходимости. Приведены примеры расчетов.

## 2. Постановка задачи и целевая функция

Рассмотрим объект, описываемый разностным уравнением

$$(1) \quad x_{k+n} + \alpha_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0x_k = \beta_nu_{k+n} + \dots + \beta_0u_k, \quad k = \overline{1, N-n},$$

с постоянными коэффициентами  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ , подлежащими определению по наблюдениям

$$\check{x}_k \doteq x_k + s_k^x + \eta_k^x, \quad \check{u}_k \doteq u_k + s_k^u + \eta_k^u, \quad k = \overline{1, N-n}.$$

Здесь  $\eta_k^{x,u} \in \mathbb{R}$  – н.о.р. случайные величины  $\mathbf{M}\eta_k^{x,u} = 0$ ,  $\mathbf{M}(\eta_k^{x,u})^2 = \sigma^2$  с ограниченным носителем распределения диаметра  $\sim O(\sigma)$ ;  $s_k^{x,u} \in \mathbb{R}$  – детерминированные возмущения.

Многомерные системы с матричными коэффициентами не рассматриваются для упрощения изложения.

Определим в  $\mathbb{R}^M$ ,  $M = 2N$  векторы из отсчетов сеточных функций

$$\begin{aligned} z &\doteq [x_1; \dots; x_N; u_1; \dots; u_N], \\ s &\doteq [s_1^x; \dots; s_N^x; s_1^u; \dots; s_N^u], \\ \eta &\doteq [\eta_1^x; \dots; \eta_N^x; \eta_1^u; \dots; \eta_N^u]. \end{aligned}$$

Система уравнений (1) в матричном виде будет иметь вид

$$(2) \quad G^\top z \doteq [G_\alpha^\top \quad G_\beta^\top] z = 0, \quad G_\beta^\top \doteq \begin{bmatrix} \beta_0 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & & & 0 \\ & \beta_0 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \beta_0 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что  $s = S\pi$ , где  $S \in \mathbb{R}^{2N \times q}$  – заданная матрица с линейно независимыми столбцами,  $\pi \in \mathbb{R}^q$  – подлежащий определению вектор координат, и выполнено условие  $\text{im } S \cap \ker G^\top = 0$ .

Определим вектор коэффициентов  $\gamma$  и вектор параметров  $\theta$ :

$$\gamma \doteq [\beta_0; \dots; \beta_n; \alpha_0; \dots; \alpha_{n-1}; 1] \doteq [\theta; 1].$$

Вариационная целевая функция [9] для состоятельной идентификации [4, раздел 3] коэффициентов уравнения (1) имеет вид

$$(3) \quad J = (\check{z} - z - S\pi)^\top (\check{z} - z - S\pi) \rightarrow \min_{\pi, z, \theta: G_\theta^\top z = 0}.$$

Решением задачи будет сходящийся за конечное число шагов алгоритм вычисления вектора коэффициентов  $\hat{\theta}$ , координат  $\hat{\pi}$  и сигнала  $\hat{z}$ , лежащих в заданной малой окрестности  $E \subset \mathbb{R}^{2N+q+2n+1}$  ( $\text{diam } E \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$ ) точки глобального минимума (3).

**Предложение 1.** Для произвольного фиксированного значения параметра  $\theta$  минимум  $J$  (3) по переменным  $\pi$  достигается в точке

$$(4) \quad \hat{\pi} = \left( \tilde{S}^\top \tilde{S} \right)^{-1} \tilde{S}^\top \Pi_G \tilde{z}, \quad \tilde{S} \doteq \Pi_G S, \quad \Pi_G \doteq GCG^\top \quad C \doteq (G^\top G)^{-1}.$$

После подстановки оптимальных значений  $z = \hat{z} = (I - \Pi_G)(\tilde{z} - S\pi)$  и  $\pi = \hat{\pi}$  (4) в выражение (3) получим целевую функцию для переменных  $\theta$ :

$$(5) \quad J(\theta) = \tilde{z}^\top (\Pi_G - \Pi_{\tilde{S}}) \tilde{z}.$$

Матрица  $\Pi = \Pi_G - \Pi_{\tilde{S}}$  проективна ( $\Pi^2 = \Pi$ ) и симметрична, что гарантирует неотрицательную определенность квадратичной формы (5).

### 3. Условия идентифицируемости

Под идентифицируемостью параметра  $\theta$  понимаем взаимную однозначность отображения  $\theta \mapsto \ker G_\theta^\top + \text{im } S$  в некоторой области  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ . Если  $\Theta$  – малая окрестность точки  $\theta$ , то говорится о локальной идентифицируемости.

**Определение 1.** Назовем вектор  $w \doteq [w_1; \dots; w_{N-n}]$  импульсной функцией системы (1), если  $w = [x_{n+1}; \dots; x_N]$  есть решение системы (1) с функцией в правой части  $u = [1; 0; \dots; 0]$  при нулевых начальных условиях  $[x_1; \dots; x_n] = [0; \dots; 0]$ .

**Теорема 1.** В системе (1) с матрицей  $G$  (2) параметр  $\theta$  локально идентифицируем, если выполнено любое из трех достаточных условий на область  $\Theta$ : 1) фиксирован вектор  $\alpha$ ; 2) фиксирован вектор  $\beta$ ; 3) допустимые приращения  $d\alpha, d\beta$  не связаны линейным соотношением

$$\begin{bmatrix} d\beta_0 \\ \vdots \\ d\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\alpha_0 \\ \vdots \\ d\alpha_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$(6) \quad x_{k+n} + \alpha_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0x_k = 0, \quad k = \overline{1, N-n},$$

$$(7) \quad G_\alpha^\top x = 0.$$

Ассоциируем матрицу  $G_\alpha$  (7) с характеристическим многочленом

$$\alpha(\zeta) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0.$$

**Определение 2.** Вектор (сеточную функцию)  $x \in \mathbb{R}^N$  будем называть квазимногочленом степени  $n$  ( $< N - 1$ ), если он является решением некоторого однородного разностного уравнения (6) порядка  $n$ :  $\exists \alpha(\zeta): \deg \alpha(\zeta) = n, G_\alpha^\top x = 0$ , – и при этом не существует уравнения (6) меньшего порядка  $m \in \overline{1, n-1}, G_m^\top x = 0, \deg \mu(\zeta) = m$ , решением которого являлся бы вектор  $x$ .

Обозначим  $Q_n \subset \mathbb{R}^N$  множество всех квазимногочленов порядка  $\leq n$ .

**Теорема 2.** Если столбцы  $s_i \in \mathbb{R}^N$  матрицы  $S \doteq [s_1, \dots, s_q]$  не являются квазимногочленами степени  $2n$  или ниже:  $s_i \notin Q_{2n}, i = \overline{1, q}$ , – то в однородной системе (6) с матрицей  $G_\alpha$  (7) параметр  $\theta \doteq [\alpha_0; \dots; \alpha_{n-1}]$  глобально идентифицируем (без ограничений на область  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^n$ ).

## 4. Вычислительный алгоритм

Используем модификацию итерационного процесса с обновляемой обратной матрицей («нелинейные обратные итерации») [5–8]:

$$(8) \quad \gamma_{[m+1]} = \gamma / [0 \dots 0 \ 1] \gamma, \quad \gamma = Q_{[m]}^{-1} \gamma_{[m]}, \quad m \geq 0,$$

$$Q \doteq V^T C^{1/2} (I - \Pi_F) C^{1/2} V, \quad F \doteq C^{1/2} G^T S,$$

$$V \doteq \begin{bmatrix} -u_1 & -u_2 & \dots & -u_{n+1} & x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \\ -u_2 & -u_3 & \dots & -u_{n+2} & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -u_{N-n} & -u_{N-n+1} & \dots & -u_N & x_{N-n} & x_{N-n+1} & \dots & x_N \end{bmatrix}.$$

В случае  $S = 0$  получаем вариационную задачу Прони без детерминированных составляющих, вычислительное решение для которой исследовалось в [8].

Для процесса (8) верны теоремы сходимости из статьи [8] с заменой

$$C \rightarrow C^{1/2} (I - \Pi_F) C^{1/2}.$$

### 4.1. Модельный пример

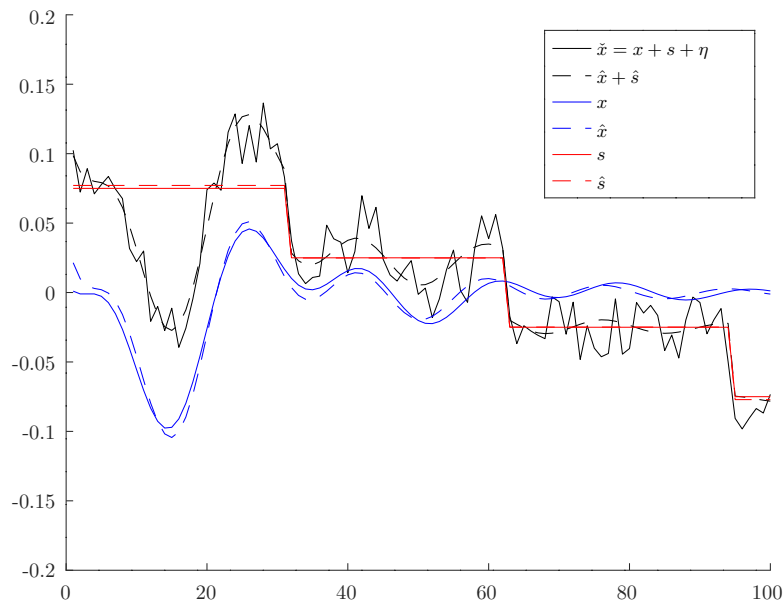


Рис. 1. Наблюдения  $\tilde{x} = x + s + \eta$  и оценки  $\hat{x}, \hat{s}$  процессов  $x, s$

Наблюдения  $\tilde{x} = x + s + \eta \in \mathbb{R}^{100}$  были получены из решения уравнения

$$(9) \quad x_{k+4} - 3,70 x_{k+3} + 5,26 x_{k+2} - 3,41 x_{k+1} + 0,85 x_k = 0, \quad k = \overline{1, 97},$$

добавлением к процессу  $x = [x_1; \dots; x_{100}]$  составляющей  $s = S\pi = S \begin{bmatrix} 1/40 \\ 1/40 \end{bmatrix}$ ,

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & \dots & 2 & -2 & \dots & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

и аддитивного шума  $\eta_k$  с нулевым средним и равномерным распределением на интервале  $\pm 0.3 \|x\|_\infty$  (рис. 1).

Итоговая относительная погрешность оценок коэффициентов уравнения (9) составила менее 10%, при 7 итерациях алгоритма (8). Оценки процессов приведены на рис. 1.

## 5. Заключение

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

## Список литературы

1. Цыпкин Я.З. Адаптивно инвариантные дискретные системы управления // Автоматика и телемеханика. 1991. № 5. С. 96–124.
2. Ван Цзянь, Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А. Компенсация мультисинусоидального возмущения на основе параметризации Юлы–Кучеры // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 19–33.
3. Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // Автоматика и телемеханика. 2020. № 9. С. 35–92.
4. Ломов А.А. Совместная идентифицируемость коэффициентов линейных разностных уравнений объекта и аддитивных возмущений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, Вып. 4. С. 63–78.
5. Osborne M.R. A class of nonlinear regression problems // Data Representation / Eds. R.S. Anderssen and M.R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.
6. Егоршин А.О., Будянов В.П. Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. № 1. С. 78–82. [https://www.iae.nsk.su/images/stories/5\\_Autometria/5\\_Archives/1973/1/78-82.pdf](https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1973/1/78-82.pdf) (дата обращения: 25.12.2023).
7. Ломов А.А., Русинова Е.А. Сравнение целевых функций в задаче Прони для аппроксимации данных измерений // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». 2022. Т. 11. № 2. С. 18–27. <https://vestnik.susu.ru/cmi/article/view/11594/9288> (дата обращения: 26.12.2023).
8. Ломов А.А. О сходимости вычислительных алгоритмов в вариационной задаче идентификации коэффициентов разностных уравнений // Сибирский журнал промышленной математики. 2020. Т. 83, № 3. С. 77–90.
9. Householder A.S. On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves. Oak Ridge National Lab. Report ORNL-455. 1950. Oak Ridge, Tennessee. 16 pp. <http://www.technicalreports.org/trail/detail/11105> (дата обращения: 26.12.2023).