УДК 681.5.015

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВХОДНЫМИ СИГНАЛАМИ

Ю.В. Цыганова

Ульяновский государственный университет

Россия, 432017, Ульяновск, Льва Толстого ул., 42

E-mail: tsyganovajv@gmail.com

А.В. Цыганов

Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова

Россия, 432071, Ульяновск, Ленина пл., 4/5

E-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Ключевые слова: параметрическая идентификация, дискретная линейная стохастическая система, неизвестные входные сигналы.

Аннотация: В работе рассмотрена задача численной идентификации неизвестного параметра дискретной линейной стохастической системы с неизвестными входными сигналами. Решение основано на численной минимизации инструментального критерия идентификации, который зависит только от наблюдаемых величин. На примере решения задачи численной идентификации параметра модели движения на плоскости проведено сравнение точности оценок, вычисляемых с помощью предложенного метода в условиях неизвестных входных сигналов, с методом максимального правдоподобия при известных входных сигналах. По результатам численных экспериментов, проведенных в MATLAB, оба метода показали сравнимую точность оценок параметра, что подтверждает работоспособность предложенного подхода.

1. Введение

Методы одновременного оценивания неизвестного входного сигнала и вектора состояния дискретных линейных стохастических систем вызывают большой интерес благодаря их практическому применению в современных областях исследований, таких как обнаружение и диагностика нарушений в технических системах, оценка геофизических процессов и др. в случае, когда нет никакой информации о динамике неизвестного входного сигнала и/или его статистических характеристиках, которые могут меняться со временем. В [1] приведен обзор указанных методов.

В настоящей работе рассматривается класс дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами и параметрической неопределенностью, что усложняет постановку задачи оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов системы, и требует решения задачи численной идентификации системного параметра в условиях повышенной априорной неопределенности.

Предположим, что дискретная линейная стохастическая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_k = Fx_{k-1} + Bu_{k-1} + Gw_k, \\ z_k = Hx_k + v_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u_k \in \mathbb{R}^r$ – неизвестный входной сигнал; $z_k \in \mathbb{R}^m$ – вектор измерений; $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – матрицы, определяющие систему (1); N – число доступных измерений; начальное состояние $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, \Pi_0)$, аддитивный шум в уравнении модели $w_k \in \mathbb{R}^q \sim \mathcal{N}(0, Q)$ и шум в измерениях $v_k \in \mathbb{R}^m \sim \mathcal{N}(0, R)$ взаимно независимые. Ковариационные матрицы Q и R шумов w_k и v_k положительно определенные.

Введем предположения о повышенной априорной неопределенности системы (1):

1) внешнее входное воздействие (входной сигнал) u_k полностью не известен, то есть нет никакой априорной информации о динамике входного сигнала или его статистических характеристиках;

2) в системе имеется параметрическая неопределенность, то есть матрицы F и G, определяющие динамику вектора состояния x_k, зависят от неизвестного параметра $\theta \in \mathbb{R}^p$, то есть $F = F(\theta)$ и $G = G(\theta)$.

Целью данной работы является решение задачи идентификации параметра θ системы (1) по доступным измерениям $Z_1^N = \{z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_N\}$ при условии неизвестных входных сигналов u_k.

2. Метод идентификации параметра дискретной линейной стохастической системы

Задача одновременного оценивания неизвестного входного сигнала и вектора состояния линейной стохастической системы была решена в [2, 3].

Предположим, что $\operatorname{rank} H = n$ и выполнены следующие достаточные условия для несмещенной оценки вектора состояния [2]:

$$\operatorname{rank} HB = \operatorname{rank} B = r. \tag{2}$$

Предположение (2) подразумевает $n \geqslant r$ и $m \geqslant r$.

Алгоритм оптимальной дискретной фильтрации для одновременного оценивания неизвестного входного сигнала u_k и вектора состояния системы x_k, разработанный Гиллейнсом и Де Мором в [3], состоит из трех последовательных шагов, повторяющихся для каждого измерения z_k $(k = 1, \ldots, N)$:

1) одношаговое предсказание оценки вектора состояния $\hat{x}_{k|k-1}$;

2) вычисление оценки входного сигнала $\hat{u}_{k-1}$;

3) обновление оценки вектора состояния $\hat{x}_k$ по текущему измерению z_k.

В недавней работе авторов [1] предложен новый метод параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем при наличии неизвестных входных сигналов.

Следуя [1], в качестве исходного критерия идентификации рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}_e(\theta) = \mathbf{E}\left\{e_k^T(\theta)e_k(\theta)\right\} = \operatorname{tr}\mathbf{E}\left\{e_k(\theta)e_k^T(\theta)\right\}, \tag{3}$$

зависящий от ненаблюдаемой ошибки оценивания вектора состояния $e_k(\theta) = x_k - x_k^*(\theta)$, где $\hat{x}_k^*(\theta)$ – оценка вектора состояния x_k, которую можно вычислить с помощью алгоритма Гиллейнса-Де Мора для заданного значения параметра θ.

Предположим, что $\operatorname{rank} H = n$ и выполнено условие (2). Рассмотрим наблюдаемый процесс $\varepsilon_k(\theta)$ в виде

$$\varepsilon_k(\theta) = W^+ z_k - \hat{x}_k^*(\theta), \tag{4}$$

где $W^+ = (H^T H)^{-1} H^T$.

С учетом (4), инструментальный критерий $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta)$, предложенный в [1], имеет вид:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta) = \mathbf{E}\left\{\varepsilon_k^T(\theta)\varepsilon_k(\theta)\right\} = \operatorname{tr}\mathbf{E}\left\{\varepsilon_k(\theta)\varepsilon_k^T(\theta)\right\}. \tag{5}$$

Теорема 1 ([1]). *Предположим, что матрицы H и B в (1) не зависят от θ и $\operatorname{rank} H = n$, $\operatorname{rank} HB = \operatorname{rank} B = r$. Тогда $\mathcal{J}_e(\theta)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta)$ имеют одну и ту же точку минимума $\theta^\dagger$ и выполняется соотношение*

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta^\dagger) = \mathcal{J}_e(\theta^\dagger) + \mathrm{Const}, \tag{6}$$

где константа $\mathrm{Const} = \operatorname{tr}\left\{W^+ R (W^+)^T\right\} - 2\operatorname{tr}\left\{W^+ R M^T B^T\right\}$ не зависит от значений параметра θ.

Доказательство представлено в [1].

Если заменить в $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta)$ оператор математического ожидания $\mathbf{E}\{\cdot\}$ на равномерное по времени усреднение, получим практически реализуемый инструментальный критерий идентификации

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^T(\theta)\varepsilon_k(\theta). \tag{7}$$

Значение критерия идентификации (7) можно вычислить с помощью алгоритма Гиллейнса-Де Мора. Для решения задачи идентификации параметров модели (1), мы предлагаем использовать критерий $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, N)$ в качестве целевой функции, минимизация которой может быть выполнена различными численными методами.

3. Численный пример

Рассмотрим задачу идентификации неизвестного параметра модели движения объекта на плоскости:

$$x_k = \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & 0 \\ \theta & 0 \\ 0 & \frac{\theta^2}{2} \\ 0 & \theta \end{bmatrix} w_k, \tag{8}$$

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + v_k, \quad k = 1, \ldots, 100, \tag{9}$$

где $x_k = [x_1, x_2, x_3, x_4]_k^T$, $x_1 = x$ и $x_3 = y$ координаты объекта, $x_2 = v_x$ и $x_4 = v_y$ проекции скорости на координатные оси, начальное состояние $x_0 \sim \mathcal{N}([0,1,0,1]^T, I_2)$, величина $w_k \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ моделирует такие случайные помехи, как малые ускорения, турбулентность, изменение ветра, и т. д., шум в измерениях $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$, и θ – модельный параметр, подлежащий идентификации.

Предположим, что «истинное» значение модельного параметра равно $\theta^\dagger = 0.1$, а входной сигнал имеет вид:

$$u_k = \left[\sin\frac{2\pi k}{100},\ \cos\frac{2\pi k}{100}\right]^T. \tag{10}$$

Приведем результаты решения задачи идентификации параметра модели движения объекта (8), (9) с входными сигналами (10) по имеющимся доступным измерениям z_k.

Мы сравнили два разных способа решения данной задачи в предположении: 1) входные сигналы известны; 2) входные сигналы неизвестны.

Первый метод численной идентификации основан на использовании в качестве критерия идентификации отрицательной логарифмической функции правдоподобия $\mathcal{J}_{LR}(\theta, N)$ [4], в которой невязки $\nu_k(\theta)$ и ковариационная матрица невязок $\Sigma_{\nu,k}(\theta)$ вычисляются с использованием фильтра Калмана [5]. Второе решение основано на инструментальном критерии (7).

Численные эксперименты проводились в системе MATLAB. Для минимизации критериев идентификации $\mathcal{J}_{LR}(\theta, N)$ и $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, N)$ использовалась функция fmincon с параметрами: Algorithm=interior-point, SpecifyObjectiveGradient=false, Display=off.

Была проведена серия из 100 экспериментов для различных значений ковариации шума в измерителе: $R_1 = \mathrm{diag}(I_2, 4I_2)$, $R_2 = \mathrm{diag}(0.25I_2, I_2)$, $R_3 = \mathrm{diag}(0.01I_2, 0.04I_2)$. В каждом эксперименте проводилась идентификация параметра θ по результатам смоделированных зашумленных измерений. Поиск решения осуществлялся на отрезке $[0; 2]$. Начальное значение параметра в каждом эксперименте выбиралось случайным образом. Результаты идентификации представлены в таблицах 1–3.

Таблица 1. Результаты идентификации (R_1)

Критерий	Среднее	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_{LR}(\theta, N)$	0.101047	0.001271	1.097051
$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, N)$	0.100128	0.001012	0.774262

Приведенные результаты показывают, что для рассматриваемой задачи оба подхода демонстрируют примерно одинаковую точность и качество идентификации. Ошибки RMSE и MAPE убывают с уменьшением уровня шума в измерителе.

Таблица 2. Результаты идентификации (R_2)

Критерий	Среднее	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_{LR}(\theta, N)$	0.100459	0.000625	0.518950
$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, N)$	0.100036	0.000473	0.380393

Таблица 3. Результаты идентификации (R_3)

Критерий	Среднее	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_{LR}(\theta, N)$	0.099998	0.000108	0.087946
$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, N)$	0.099983	0.000109	0.088604

4. Заключение

В работе рассмотрена задача численной идентификации неизвестного параметра дискретной линейной стохастической системы с неизвестными входными сигналами. Решение основано на численной минимизации инструментального критерия идентификации, зависящего только от наблюдаемых величин. Значения предложенного критерия можно вычислить с помощью алгоритма одновременного оценивания вектора состояния системы и неизвестных входных сигналов.

С целью оценить качество идентификации предложенным методом, проведена серия вычислительных экспериментов, в которой численная идентификации параметра стохастической модели движения на плоскости выполнена при известных входных сигналах методом максимального правдоподобия и при неизвестных входных сигналах предложенным методом минимизации инструментального критерия. По результатам экспериментов оба метода показали сравнимую точность оценок параметра.

Таким образом, предложенный метод может применяться для идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем при наличии неизвестных входных сигналов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00361, https://rscf.ru/project/23-21-00361/.

Список литературы

1. Tsyganova Y., Tsyganov A. Parameter identification of the linear discrete-time stochastic systems with uknown exogenous inputs // Cybernetics and Physics. 2023. Vol. 12, No. 3. P. 219–229.
2. Kitanidis P.K. Unbiased minimum-variance linear state estimation // Automatica. 1987. Vol. 23, No. 6. P. 775–778.
3. Gillijns S., Moor B.D. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. Vol. 43, No. 1. P. 111–116.
4. Gibbs B.P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, USA, 2011.
5. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering: Theory and Practice Using MATLAB / 4th ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., USA, 2015.